TECHNIQUES & MÉTHODES S28

NB : cette fiche reprend les techniques nécessaires **minimales**; elle ne constitue donc pas un objectif, mais un prérequis!

■ ■ ■ Comment calculer l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

Tout calcul d'intégrale repose sur le **Théorème fondamental du calcul intégral** qui fait le lien entre intégrales et primitives.

Intégration à vue

Il s'agit[2] de déterminer une primitive de la fonction que l'on souhaite intégrer. Pour cela, je connais parfaitement le tableau des primitives usuelles.

Opérations algébriques

Outre la linéarité de l'intégrale, quelques méthodes algébriques sont fréquemment utilisées : par exemple, pour intégrer un polynôme en $\sin(x)$ et $\cos(x)$, je linéarise puis j'intègre terme à terme. D'autres techniques sur les fractions rationnelles seront exposées au prochain chapitre.

Intégration par parties

La méthode est simple : pour calculer l'intégrale d'un produit, j'identifie clairement u' et v :

$$\left\| \begin{array}{ll} u' = \cdots & v = \cdots \\ u = \cdots & v' = \cdots \end{array} \right.$$

Alors
$$\int_a^b u' \times v \, dt = \Big[u \times v \Big]_a^b - \int_a^b u \times v' \, dt.$$

Changement de variable

Il y a deux circonstances dans lesquelles un changement de variable s'opère :

1. pour rédiger une intégration à vue *perçante*.

2. pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(u)\,du$, à l'aide du changement de variable $u = \varphi(t)$.

Dans tous les cas, la méthode est la suivante :

$\boxed{1}$ je pose $u = \varphi(t)$,
$\boxed{2}$ je dérive formellement $du = \varphi'(t)\,dt$
$\boxed{3}$ je remplacez TOUT! sans oublier les nouvelles bornes!

Intégrale des fonctions continues par morceaux

Pour calculer l'intégrale d'une fonction cpm, j'introduis les points de discontinuité de f à l'aide de la relation de **Chasles**, et je me ramène ainsi à calculer plusieurs intégrales de fonctions continues (prolongeables par continuité en fait) sur des sous-segments.

■ ■ ■ Comment déterminer les primitives d'une fonction

D'après le théorème **Primitives d'une fonction continue**, je sais qu'une fonction continue sur un intervalle y admet des primitives. Pour déterminer une primitive quelconque de f, notée :

$$\int^x f(t)\ dt$$

$\boxed{1}$ je détermine le domaine de continuité $\mathcal{D}_f$ de f, je considère $I \subset \mathcal{D}_f$ un sous-intervalle contenu dans $\mathcal{D}_f$.

$\boxed{2}$ je calcule $\displaystyle\int^x f(t)\ dt$ à l'aide de toutes les techniques possibles de calcul d'intégrales!

$\boxed{3}$ à la fin, je n'oublie pas la constante dite d'intégration :

$$\int^x f(t)\ dt = F(x) + C, \qquad \text{où } C \in \mathbf{R}$$

Primitives d'une fraction rationnelle

Soit $F \in \mathbf{R}(X)$. Pour déterminer $\displaystyle\int^x F(t)\,dt$,

$\boxed{1}$ je présente F sous forme irréductible.
$\boxed{2}$ si $F(t)$ peut s'écrire $F(t) = t^{n-1}G(t^n)$, j'effectue le changement de variable $u = t^n$.
$\boxed{3}$ j'effectue la DES de F dans $\mathbf{R}(X)$ à l'aide des méthodes précédemment décrites.
$\boxed{4}$ j'intégre terme à terme.

2. en utilisant si besoin la linéarité de l'intégrale

Primitives se ramenant à une fraction rationnelle

- primitive des fractions rationnelles en e^t. Je pose $u = e^t$.
- primitives des fractions rationnelles en $(\sin t, \cos t)$. J'utilise le bon changement de variable à l'aide des **règles de Bioche**
- primitives des fractions rationnelles en $(\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)$. Je forme la fraction de cos et sin analogue et j'utilise les **règles de Bioche** pour deviner le bon changement de variable !

■■■ Comment estimer une intégrale

Pour estimer – majorer, minorer, borner– une intégrale, le calcul se *boutique* comme dans le cas d'une estimation de $\sum$, à ceci près qu'il est nécessaire de vérifier d'abord que **les bornes sont dans le bon sens**. Plus précisément, si je dois estimer l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, avec $a \leq b$

$\boxed{1}$ soit $t \in [a, b]$, fixé. Je cherche une estimation de $f(t)$, du genre $m \leq f(t) \leq M$ ou plus généralement $f(t) \leq g(t)$

$\boxed{2}$ j'utilise la **croissance de l'intégrale** (ou la **positivité**) : j'intègre cet encadrement *terme à terme* sans changer le sens des inégalités, j'obtiens

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M \cdot (b-a) \quad ou \quad \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt.$$

Pour majorer la valeur absolue de l'intégrale d'un produit ou minorer un produit d'intégrales, je dispose en outre de l'**inégalité triangulaire** et de l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**.
NB : la **définie-positivité** et les **cas d'égalité** dans la croissance de l'intégrale ou dans Cauchy Schwarz me permettent d'établir une égalité entre fonctions continues sur le segment.

■■■ Application des intégrales à l'étude de suites

Etude d'une suite d'intégrales

On trouve fréquemment des exercices d'étude de suites définies par des intégrales, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad I_n = \int_a^b f_n(t)\,dt$$

où $f_n : [a, b] \to \mathbf{R}$ est une fonction continue qui dépend de n. En clair, $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})^{\mathbf{N}}$ est une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ (avec $a \leq b$). En ce cas,

- Etudier la monotonie de (I_n) revient à établir une inégalité entre I_n et I_{n+1}.
  Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $t \in [a, b]$. Je compare $f_n(t)$ et $f_{n+1}(t)$. Par **croissance de l'intégrale**, I_n et I_{n+1} sont rangées dans le même ordre que les intégrandes.
- Pour étudier la limite de (I_n), j'utilise un théorème de convergence lié à l'ordre :**théorème de la limite monotone, comparaison, encadrement**.
- Pour obtenir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}, je pense à utiliser une **intégration par parties**.

Etude d'une suite de sommes

Si $U_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k,n}$ est une somme de termes dépendants *à la fois* de k et de n. Il s'agit peut- être d'une somme de **Riemann** !

$$U_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$$

$\boxed{1}$ je reconnaîs n

$\boxed{2}$ j'identifie les a_k : $a_0 = a, a_n = b, a_k = a + k\frac{b-a}{n}$

$\boxed{3}$ je factorise par $\dfrac{b-a}{n}$

$\boxed{4}$ je reconnais f

Si f est continue sur le segment $[a, b]$, alors (U_n) est convergente de limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n = \int_a^b f(t)\,dt$.

■■■ Etude des fonctions définies à l'aide d'une intégrale

Soit $a(x)$ et $b(x)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs dans I. Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbf{R})$. Pour étudier la fonction

$$\Phi(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt$$

- Domaine de définition $\mathcal{D}_\Phi$. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$x \in \mathcal{D}_\Phi \iff \text{le segment } [a(x), b(x)] \cup [b(x), a(x)] \text{ est contenu dans } I$$

- Dérivabilité de Φ. Supposons que D_Φ est un intervalle. J'introduis la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (pour $a \in D_\Phi$ est bien choisi). D'après la relation de **Chasles**,

$$\Phi(x) = F(b(x)) - F(a(x))$$

D'après le **Théorème intégrale fonction de sa borne supérieure**, je sais que F est dérivable et $F' = f$. Par composition, Φ est dérivable et la **règle de dérivation en chaîne** donne

$$\begin{aligned}\forall x \in D_\Phi,\ \Phi'(x) &= F' \circ b(x) \times b'(x) - F' \circ a(x) \times a'(x) \\ &= b'(x) f\big(b(x)\big) - a'(x) f\big(a(x)\big)\end{aligned}$$

- Etude des limites. Comme pour l'étude de suites d'intégrales, j'utilise des théorèmes d'existence de limites liés à la relation d'ordre : **théorèmes de la limite monotone, d'existence de limite par comparaison ou encadrement**.

■■■ Formules de Taylor avec reste intégrale et Taylor-Lagrange

Les formules de **Taylor** avec reste intégrale et **Taylor-Lagrange** généralisent les **Théorèmes des accroissements finis** : elles sont donc particulièrement utiles pour démontrer des inégalités ou des encadrements.

Comment encadrer f par ses polynômes de Taylor

Pour encadrer $f(x) - T_n(x)$, vous pouvez utiliser l'expression sous forme d'une intégrale du reste $R_n(x)$ à l'ordre n :

$$R_n(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt,$$

Puis on trouve un encadrement de ce reste en utilisant la croissance de l'intégrale.
Warning : prenez garde de mettre les bornes de l'intégrale dans le *bon sens* !

Comment démontrer la convergence d'une série

Il ne vous a pas échappé que les polynômes de **Taylor** de f en un point a forment la suite des sommes partielles de la série – dite de **Taylor** :

$$\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n$$

Pour démontrer le cas échéant la convergence d'une telle série, on peut utiliser l'inégalité de **Taylor-Lagrange**.

Exemple : la série exponentielle