PROGRAMME DE COLLE S22

NB : seules les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

CALCUL MATRICIEL

■■■ Opérations algébriques dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

Définition : *Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^\star \times \mathbf{N}^\star$ deux entiers naturels non nuls. On appelle **matrice de n lignes et p colonnes** toute famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ d'éléments de $\mathbf{K}$. On la représente sous la forme d'un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbf{K}$.*

Définition : *Somme de matrices, multiplication externe par un scalaire, transposition et conjugaison.*

Définition : Produit de deux matrices —. *Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$, on définit la matrice $A \times B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ par :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad (A\times B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \times b_{k,j}$$

Théorème*.— Propriétés du produit de matrices
Soit A, B, C des matrices à coefficients dans $\mathbf{K}$. Pourvu que les produits et sommes ci-dessous soient bien définis, on a :

1. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
2. $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
3. $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
4. $\lambda(A \times B) = (\lambda A) \times B = A \times (\lambda B)$
5. $I \times A = A$ et $A \times I = A$.
6. $A \times 0 = 0$ et $0 \times A = 0$.

Proposition.— Écriture matricielle des systèmes d'équations linéaires
Considérons le système de n équations linéaires à p inconnues défini ci-contre.
Notons $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ la matrice des coefficients de (S) et $B = (b_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ la matrice colonne *second membre*. On a l'équivalence :

$$(S) \iff A \times X = B$$

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

■■■ Matrices carrées

Théorème*.— $\left(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \times\right)$ est un anneau.[6]

Définition : puissances successives d'une matrice
*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice carrée d'ordre n. On définit les **puissances successives** de A par récurrence :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ A^0 = I_n \\ \bullet\ \forall k \in \mathbf{N},\ A^{k+1} = A \times A^k \end{array} \right.$$

Définition : polynômes d'une matrice
Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$: $P = a_pX^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1X + a_0$. On définit pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ la matrice $P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ par

$$P(A) = a_pA^p + a_{p-1}A^{p-1} + \cdots + a_1A + a_0\ I_n$$

Théorème*.— Formule de Newton et identité géométrique —. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $A \times B = B \times A$. Alors

$$\blacksquare \quad (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k \times B^{p-k}$$

$$\blacksquare \quad A^{p+1} - B^{p+1} = (A-B) \times \sum_{k=0}^{p} A^k \times B^{p-k}$$

Vocabulaire : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit qu'un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ est un **polynôme annulateur de** A si $P(A) = 0$.*

Savoir-faire : calculer les puissances successives d'une matrice A

6. non commutatif lorsque $n \geq 2$

- en utilisant un polynôme P, annulateur de A, à l'aide de la division euclidienne de X^n par P,
- à l'aide de la formule de Newton, en décomposant $A = D+N$, où D est diagonale, N est nilpotente et $DN = ND$.
- par récurrence.

Savoir-faire :utiliser une représentation matricielle pour étudier une suite récurrente linéaire d'ordre 2, des suites récurrentes linéaires d'ordre 1, imbriquées.

■■■ Matrices carrées inversibles

Définition-Proposition.— *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que :*

$$\boxed{A \times B = I_n \text{ et } B \times A = I_n}$$

*Si elle existe, B est unique. On l'appelle l'**inverse** de A, et on la note $B = A^{-1}$.*

Théorème*.— Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors :

1. Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

2. Si A est inversible alors ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

3. Si A et B sont inversibles, alors $A \times B$ est inversible et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

4. Si A est inversible, alors
B est inversible *si et seulement si* $A \times B$ est inversible.
B est inversible *si et seulement si* $B \times A$ est inversible.

5. Si A est inversible, alors A est simplifiable à gauche et à droite.

Théorème.— Lien fondamental avec les systèmes de Cramer —. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. On note (S) le système (S) $A \times X = B$.

$$\boxed{(S) \text{ est un système de CRAMER } \textit{si et seulement si } A \text{ est inversible.}}$$

Dans ce cas, l'unique solution de (S) est $A^{-1} \times B$.

Théorème.— Inversibilité des matrices triangulaires —. Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice triangulaire[7]. Alors

T est inversible *si et seulement si* les coefficients diagonaux de T sont **tous non nuls**.

Corollaire*.— Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. A est inversible *si et seulement si* $a \times d - b \times c \neq 0$. Dans ce cas,

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Théorème.— Inversibilité à gauche ou à droite —. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors

$$\boxed{\begin{array}{lll} A \text{ est inversible} & \textit{si et seulement si} & \text{il existe } B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \text{ telle que } A \times B = I_n \\ & \textit{si et seulement si} & \text{il existe } B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \text{ telle que } B \times A = I_n. \end{array}}$$

■■■ Détermination pratique de l'inverse

Savoir-faire : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Vous devez savoir vérifier l'inversibilité et, le cas échéant, calculer A^{-1} de trois manières différentes :

- Point de vue SEL
- Algorithme de Gauss-Jordan (opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice)
- Utilisation d'un polynôme annulateur.

7. inférieure ou supérieure, peu importe !