Chapitre 29

Espaces probabilisés finis

Sommaire

I Introduction 728
1 Expérience aléatoire 728
2 Evénements aléatoires 728
II Probabilité sur un ensemble Ω fini 729
1 Exemple fondamental : probabilité uniforme sur un ensemble fini 729
2 Notion de probabilité sur un ensemble fini 730
3 Propriétés des probabilités finies 731
4 Construction d'une probabilité sur un ensemble fini 733
III Probabilités conditionnnelles 735
1 Introduction 735
2 Probabilité conditionnelle 735
3 Formule des probabilités composées 736
4 Formule des probabilités totales 737
5 Formule de Bayes 738
IV Indépendance en probabilité 738
1 Indépendance de deux événements 738
2 Indépendance mutuelle de plusieurs événements 740

I Introduction

Une petite devinette : Cinq candidats se présentent à un oral où leur seront posées cinq questions. Le premier candidat tire au hasard une question. Le deuxième candidat tire une question parmi les quatre restantes, *etc...* Le cinquième candidat planchera sur la seule question restante !

Vous êtes l'un(e) des cinq candidats, et [1] vous avez fait l'impasse sur l'une des questions au programme. On vous laisse la possibilité de choisir votre ordre de passage. Que choisissez-vous ?

1 Expérience aléatoire

Définition : *Une* ***expérience aléatoire*** *est une expérience dont on ne peut prédire* [2] *le résultat.*
L'étude d'une expérience aléatoire commence par la description des résutats possibles, appelés ***éventualités****.*
L'ensemble des résultats possibles est appelé ***univers des possibles****. On le note généralement* Ω*.*

Les exemples très simples qui suivent guideront notre étude des espaces probabilisés finis :

Expérience 1 : on lance un dé, et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure. Dans ce cas les résultats possibles sont 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Donc $\Omega = [\![1, 6]\!]$.

Expérience 2 : on lance deux dés discernables [3], et on note les numéros obtenus. Dans ce cas les résultats possibles sont les couples $(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 5), (6, 6)$. Donc $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$.

Exercice : Le jeu de loto est une expérience aléatoire. On coche 7 cases sur un grille qui en contient 49. Quels sont les résultats possibles, l'univers des possibles.

2 Evénements aléatoires

Définition : *Un* ***événement aléatoire*** *est un événement qui peut se produire ou non, suivant le résultat de l'épérience aléatoire. On le représente par l'ensemble des éventualités qui le réalisent.*

Exemple : On effectue l' **expérience 1** et on considère l'événement A "*le nombre obtenu est pair*". Cet événement est représenté par les résultats 2,4 ou 6. On notera $A = \{2, 4, 6\}$.

Exercice : On effectue l'**expérience 2**. Décrire l'événement A "*la somme des nombres obtenus est supérieure ou égale à 10*".

Ainsi, *les événements aléatoires liés à une expérience aléatoire s'identifient aux parties de l'ensemble des possibles* Ω. On dira que l' **événement A est réalisé** à la suite d'une e.a. si le résultat ω de e.a. est élément de A.

L'identification des événements aléatoires au cours d'une e.a. aux parties de Ω permet d'établir un "*dictionnaire*" entre le langage des probabilités et celui de la théorie des ensembles, de manière tout à fait analogue à celui que nous avons déjà découvert entre la théorie des ensembles et la théorie des propriétés des éléments.

Rappelez-vous...tout ceci repose sur la bijection Φ *entre* $\mathscr{P}(E)$ *et l'ensemble* $\{Vrai, Faux\}^E$ *des applications de* E *à valeurs dans* $\{Vrai, Faux\}$ *que vous avez tant aimée !* (cf. ***exercice* 10** de la feuille ENSEMBLES ET APPLICATIONS ainsi que la **Proposition ??**)

1. honte à vous !
2. avec certitude !
3. un rouge un bleu for instance

LE PETIT LAROUSSE DES PROBABILITÉS

terminologie probabiliste	terminologie ensembliste
univers des possibles	ensemble Ω
éventualité[4] ω	élément $\omega \in \Omega$
événement A	partie $A \in \mathscr{P}(\Omega)$
le résultat ω réalise A	$\omega \in A$
événement certain	Ω
événement impossible	$\emptyset$
événenement contraire de A, noté $\bar{A}$	complémentaire de A dans Ω, $\complement_\Omega A$
événement "A ou B"	$A \cup B$
événement "A et B"	$A \cap B$
événement "soit A, soit B"	$A \Delta B$
événement "A et non B"	$A \setminus B$
les événements A et B sont incompatibles	les parties A et B sont disjointes $A \cap B = \emptyset$
la réalisation de A entraîne celle de B	$A \subset B$

Définition : *On dira de plus qu'une famille finie $(A_i)_{i\in I}$ d'événements forme un* ***système complet d'événements*** *si c'est une partition de Ω, c'est-à dire si les A_i sont deux à deux disjoints et recouvrent Ω :*

- $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$
- $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

II Probabilité sur un ensemble Ω fini

Dans tout le chapitre Ω désigne un ensemble fini et non vide.

1 Exemple fondamental : probabilité uniforme sur un ensemble fini

Reprenons l'**expérience 1**. On lance un dé, et on obtient un nombre $\omega \in [\![1,6]\!]$. Si le dé est parfaitement équilibré, chaque nombre a "*autant de chances*" de sortir qu'un autre, c'est-à-dire *1 chance sur 6.* On dira que les événtualités sont **équiprobables** et on notera

$$p(\{3\}) = \frac{1}{6}$$

De la même manière considérons l'événement A "*le nombre obtenu est pair*", c'est-à-dire $A = \{2,4,6\}$. Comme A est une partie à 3 éléments de Ω qui ont chacun la probabilité $\frac{1}{6}$ de se réaliser, A a la probabilité $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ d'être réalisé. Ceci nous conduit à adopter la définition suivante :

Définition : *On considère une expérience aléatoire e.a. pour laquelle l'univers des possibles Ω est un ensemble fini, non vide , et on suppose que les éventualités sont équiprobables.*
Soit A une partie de Ω. La probabilité que l'événement A soit réalisé à l'issue de e.a. est donnée par :

$$\boxed{p(A) = \frac{\mathsf{Card}\ A}{\mathsf{Card}\ \Omega} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}}$$

Le procédé qui à tout événement A de Ω associe sa probabilité $p(A)$ définit une application $p : \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbf{R}^+$.

Proposition 29.1.— Soit Ω un ensemble fini non vide. L'application $p : \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbf{R}^+$ définie ci-dessus vérifie :

1. $p(\Omega) = 1$,
2. pour toute partie $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $p(A) \in [0,1]$,
3. pour toutes parties $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$, si $A \cap B = \emptyset$, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Démonstration ▽
Le 1. découle directement de la définition de $p(\Omega)$. Le 2 et le 3 découlent de notre étude des ensembles finis.
Montrons le 2. : soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, une partie de Ω. D'après la **Proposition** 29.5 $0 \leq \text{Card } A \leq \text{Card } \Omega$. On obtient le résultat en divisant cette inégalité par Card Ω.
Pour le 3. : considérons A et B deux parties de Ω et supposons que $A \cap B = \emptyset$. D'après la **Proposition** 29.10Card $(A \cup B) =$ Card $A +$ Card B. En divisant cette inégalité par Card Ω on obtient l'égalité désirée. ▲

Remarque : La propriété 3. est appelée **additivité**. On vérifie aisément [5] qu'elle s'étend à la disjonction d'une famille finie quelconque d'événements deux à deux incompatibles.

Définition : *L'application $p : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ ainsi définie est appelée* ***probabilité uniforme*** *sur Ω.*

Remarque : C'est la probabilité qui est utilisée lorsqu'on dit *tirer au hasard*.

Exercice : Les 28 tomes d'une encyclopédie sont rangés au hasard sur une étagère.

1. Quelle est la probabilité que les tomes I et II apparaissent côte à côte et dans cet ordre sur l'étagère ?

2. Quelle est la probabilité que les p premiers tomes ($1 \leq p \leq 28$) apparaissent côte à côte et dans le bon ordre ?

Solution ▽
Commençons par décrire cette expérience aléatoire : un résultat possible est une liste de 28 nombres compris entre 1 et 28, donc une permutation de $[\![1, 28]\!]$. D'où $\Omega = \mathscr{S}_{28}$ est l'ensemble des permutations de $[\![1, 28]\!]$. Comme les livres sont rangés au hasard, chaque permutation est équiprobable. On munit donc Ω de la probabilité uniforme. Il sera donc utile de calculer le cardinal de Ω : Card $\Omega = 28!$.

1. *Notons A l'événement "les deux premiers tomes apparaissent côte-à-côte, et dans cet ordre sur l'étagère". Puisque Ω est muni de la probabilité uniforme, nous avons :*

$$p(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}.$$

Calculons donc Card A. Un élément de A est de la forme : $(a_1, \ldots, a_{k-1}, 1, 2, a_{k+2}, \ldots, a_{28})$. Pour chaque position $k \in [\![1, 27]\!]$ du premier tome dans la suite, il y a $26!$ façons de ranger les autres tomes. J'en déduis que Card $A = \binom{27}{1} \times 26!$ et par conséquent

$$p(A) = \frac{27!}{28!} = \frac{1}{28}$$

2. *Notons B l'événement "les p premiers tomes apparaissent côte-à-côte, et rangés dans le bon ordre sur l'étagère". Un élément de B est de la forme : $(a_1, \ldots, a_{k-1}, 1, 2, \ldots, p, a_{k+p}, \ldots, a_{28})$. Pour chaque position $k \in [\![1, 28-p+1]\!]$ du premier tome dans la suite, il y a $(28-p)!$ façons de ranger les autres tomes. J'en déduis que Card $A = \binom{28-p+1}{1} \times (28-p)!$ et par conséquent*

$$p(A) = \frac{(28-p+1)!}{28!}$$

▲

2 Notion de probabilité sur un ensemble fini

L'exemple de la probabilité uniforme est très "*naturel*" mais trop restrictif car on rencontre rapidement des expériences aléatoires pour lesquelles les événements élémentaires [6] ne sont pas équiprobables : il suffit pour cela de mener l'**expérience 1** avec un dé truqué. Il arrive aussi, que partant d'un univers où les événements élémentaires sont équiprobables, on aboutisse à un nouvel univers des possibles pour lequel ce n'est plus le cas . Considérons par exemple l'

Expérience 2 bis : On lance deux dés et on note la somme des résultats obtenus.
Un résultat possible pour cette e.a. est un entier compris entre 2 et 12, l'univers des possibles est donc $\Phi = \{2, 3, \ldots, 12\}$.

On peut munir Φ d'une probabilité en procédant de la manière suivante :
Notons $\Omega = [\![1, 6]\!]^2 = \{(d_1, d_2),\ 1 \leq d_1 \leq 6,\ 1 \leq d_2 \leq 6\}$ l'ensemble des résultats possibles aux deux lancers

5. par récurrence, ou en utilisant le **Corollaire** 29.11
6. c'est-à-dire les éventualités

de dés (the true **expérience 2**). Comme les événements élémentaires sont équiprobables, on munit Ω de la probabilité uniforme. A présent, définissons σ_k pour $2 \leq k \leq 12$ l'événement $d_1 + d_2 = k$. Alors

$$\begin{array}{rcl} p(\sigma_2) & = & p(\{(1,1)\}) = 1/36 \\ p(\sigma_3) & = & p(\{(1,2),(2,1)\}) = 2/36 \\ p(\sigma_4) & = & p(\{(1,3),(3,1),(2,2)\}) = 3/36 \\ & \vdots & \\ p(\sigma_7) & = & p(\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}) = 6/36 \\ & \vdots & \\ p(\sigma_{11}) & = & p(\{(5,6),(6,5)\}) = 2/36 \\ p(\sigma_{12}) & = & p(\{(6,6)\}) = 1/36 \end{array}$$

Nous avons en fait défini une **probabilité *non uniforme*** sur l'ensemble $\{\sigma_2, \ldots, \sigma_{12}\}$!

Cette façon de procéder est conforme à la réalité : si on répète l '**expérience 2 bis**, la fréquence d'apparition de σ_4 *tend* vers 1/12.

La définition rigoureuse de la notion de probabilité est due à Andreï Kolmogorov (dans les années 30... du siècle dernier). Voici la version *light* :

Définition : *Soit Ω un ensemble fini, non vide. On appelle* ***probabilité*** *sur Ω toute application $p : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ qui vérifie :*

$\mathbb{P}_1$ $p(\Omega) = 1$, *et*
$\mathbb{P}_2$ *Si A et B sont des événements* ***incompatibles*** *alors* $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

On dit alors que $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p\big)$ est un ***espace probabilisé fini****, et pour tout événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ on appelle* ***probabilité de*** *A le nombre $p(A) \in [0,1]$.*

COMMENTAIRES : La propriété $\mathbb{P}_2$ est appelée **additivité**.

Exemple : Bien entendu la probabilité uniforme sur Ω est une probabilité au sens de Kolmogorov.

3 Propriétés des probabilités finies

A partir des deux propriétés $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$, nous allons voir qu'une probabilité possède nécessairement d'autres propriétés intéressantes. Dans le cas de la probabilité uniforme sur Ω, ces propriétés ont quasiment déjà été démontrées, lors de notre étude du dénombrement. *Comparez ...*

Théorème 29.2.— Soit $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p\big)$ un espace probabilisé fini. Pour tous événements A et B de $\mathscr{P}(\Omega)$, les assertions suivantes sont vraies :

1. $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
2. $p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B)$
3. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
4. $A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$

Démonstration ▽

1. D'après la caractérisation du complémentaire (**Proposition** 6.2) $\bar{A} \cup A = \Omega$ et $\bar{A} \cap A = \emptyset$. D'après les propriétés $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$, il s'en suit $p(\bar{A}) + p(A) = p(\Omega) = 1$.

2. Par définition de $A \setminus B$, nous avons : $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$ et $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$. La propriété d'additivité s'applique et donne $p(A \setminus B) + p(A \cap B) = p(A)$.

3. Remarquons que $A \cup B = B \cup (A \setminus B)$. Comme $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$, la propriété d'additivité s'applique. Nous obtenons : $p(A \cup B) = p(B) + p(A \setminus B)$. D'après le 2., il vient finalement $p(A \cup B) = p(B) + p(A) - p(A \cap B)$.

4. Supposons que $A \subset B$, et écrivons B comme la réunion disjointe de A et de $B \setminus A$. Il résulte de la propriété d'additivité que $p(B) = p(A) + p(B \setminus A)$. Finalement, puisque p est à valeurs positives, nous en déduisons que $p(B) - p(A) = p(B \setminus A) \geq 0$.

▲

Remarque :

1. Le 1. du **Théorème** ci-dessus montre en particulier que $p(\emptyset) = 0 = 1 - p(\Omega) = 0$.

2. Vous aurez remarqué l'analogie entre ces propriétés et les propriétés des fonctions indicatrices. Faîtes **attention**, la probabilité d'une intersection n'est pas en général le produit des probabilités, contrairement aux résultats analogues concernant les indicatrices.
Considérez par exemple $\Omega = [\![1, 6]\!]$ muni de la proba uniforme, $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 4, 5, 6\}$.

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, l'assertion 3. se généralise aux réunions finies quelconques :

Théorème 29.3.— Formule de Poincaré pour les probabilités finies
Soient $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p\big)$ un espace probabilisé fini, $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une **famille finie quelconque** d'événements. Alors :

$$\boxed{p\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} p\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right)}$$

En particulier, **si les événements $(\mathbf{A_i})$ sont deux à deux incompatibles**[7] nous obtenons :

$$\boxed{p\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)}$$

Remarque : La deuxième partie du **Théorème** de Poincaré est une généralisation de la propriété $\mathbb{P}_2$ au cas d'une réunion finie de parties deux à deux disjointes. On appellera cette propriété la propriété d'**additivité finie** de p.

Commentaires : Avant de donner la preuve de la formule de Poincaré pour les probabilités, remarquons que cette formule ouvre deux pistes très intéressantes :

la première saute aux yeux : nous pouvons calculer la probabilité de n'importe quelle réunion d'événements, *à condition* de connaître la probabilité de leurs intersections. Ainsi, la formule de Poincaré ramène le calcul de la probabilité d'une réunion quelconque à celui d'une intersection quelconque. Cette question animera les paragraphes **Probabilités conditionnelles** et **Indépendance en probabilité** qui suivent,

la deuxième montre qu'une probabilité finie est entièrement déterminée par la donnée des probabilités des événements élémentaires, c'est le sens du corollaire ci-dessous.

Corollaire 29.4.— Soit $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p\big)$ un espace probabilisé fini. Pour tout événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$,

$$\boxed{p(A) = \sum_{\omega \in A} p(\{\omega\})}$$

Démonstration du corollaire 30.4 ▼
Il suffit d'appliquer la deuxième partie du **Théorème** 30.3 à la réunion : $A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$. ▲

Démonstration de la formule de Poincaré ▼

La preuve sera par récurrence forte sur n. Notons pour $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$, $P(n)$ la propriété :

pour tout entier k, $2 \leq k \leq n$, la formule de Poincaré est vraie pour toute famille de k événements .

Initialisation : Si $n = 2$, c'est précisément l'assertion 3. du théorème précédent.
Hérédité : Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On suppose [8] que toute famille finie de k événements, $2 \leq k \leq n$, satisfait la formule de Poincaré.
Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n+1}$ une famille de $n+1$ événements. On montre que

$$p\Big(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n+1} p\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right).$$

Notons $B = \cup_{i=1}^{n} A_i$, et utilisons une première fois l'hypothèse de récurrence avec $k = 2$. Il vient :

$$p\big(B\cup A_{n+1}\big) = p(A_{n+1}) + p(B) - p(B\cap A_{n+1}). \tag{29.1}$$

Comme B et $B\cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap A_{n+1})$ sont deux événements réunions de n événements, nous pouvons leur appliquer l'hypothèse de récurrence, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\text{d'une part}\qquad p\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} p\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right),\\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n+1\\ i_k<n+1}} p\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right),\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n+1\\ i_k<n+1}} p\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right),\\
\text{et d'autre part}\qquad p\big(B\cap A_{n+1}\big) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} p\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\cap A_{n+1}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_{k+1}\leq n+1\\ i_{k+1}=n+1}} p\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\cap A_{i_{k+1}}\right)\\
&= \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k} \sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n+1\\ i_k=n+1}} p\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)
\end{aligned}$$

Finalement réinjectons les expressions de $p(B)$ et $p(B\cap A_{n+1})$ dans (30.1), il vient :

$$\begin{aligned}
p\Big(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\Big) &= p(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n+1\\ i_k<n+1}} p\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)\\
&- \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k} \sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n+1\\ i_k=n+1}} p\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)\\
&= p(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} p(A_k) + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n+1\\ i_k<n+1}} p\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)\\
&+ \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n+1\\ i_k=n+1}} p\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} p(A_k) + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n+1} p\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n+1} p\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion : Par récurrence (forte), nous avons démontré [9] que la formule de Poincaré est valide pour toute famille finie d'événements.
▲

4 Construction d'une probabilité sur un ensemble fini

Nous avons vu (**Corollaire** 30.4) qu'une probabilité p sur un univers Ω fini est entièrement déterminée par la connaissance des probabilités des événements élémentaires. Plus précisément, nous avons :

8. voici l'hypothèse de récurrence
9. OUF !

Théorème 29.5.— Soient $\Omega = \{w_1, \ldots, \omega_n\}$ un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbf{N}^\star$, et $(p_1, \ldots, p_n)$ un p-uplet de nombres réels positifs.

$$\text{il existe une probabilité } p \text{ telle que pour tout } i \in [\![1,n]\!],\ p(\{\omega_i\}) = p_i.$$
$$\textit{si et seulement si}$$
$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

Démonstration ▽

Montrons que **la condition est nécessaire.** Soit p une probabilité sur Ω telle que pour $i \in [\![1,n]\!]$, $p(\{\omega_i\}) = p_i$. Alors d'après le **Corollaire** 30.4 $p(\Omega) = \sum_1^n p_i$. D'autre part, d'après $\mathbb{P}_1$ $p(\Omega) = 1$. Par transitivité de l'égalité, il s'en suit que $\sum_1^n p_i = 1$.

Montrons que la **condition est suffisante.** Supposons donnée un n-uplet de réels positifs tels que $\sum_1^n p_i = 1$. Montrons qu'il existe une probabilité, **unique** telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $p(\{\omega_i\}) = p_i$. Il s'agit d'un théorème d'existence et d'unicité. La démonstration sera par *analyse-synthèse* :

Analyse : Supposons qu'une telle probabilité existe, qui vérifie $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $p(\{\omega_i\}) = p_i$. Nécessairement, d'après le **Corollaire** 30.4, la probabilité de tout événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ est donnée par

$$p(A) = \sum_{\{i|w_i \in A\}} p_i. \tag{29.2}$$

Synthèse Vérifions que l'application définie par (30.2) est une probabilité sur Ω.

1. Pour tout événement A montrons que $p(A) \in [0,1]$: soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. Comme par hypothèse les p_i sont positifs et $\sum_1^n p_i = 1$, nous pouvons écrire l'encadrement :

$$0 \leq p(A) = \sum_{\{i|w_i \in A\}} p_i \leq \sum_{\{i|1 \leq i \leq n\}} p_i = 1.$$

2. Vérifions $\mathbb{P}_1$. Pour cela, appliquons (30.2) à Ω tout entier, il vient : $p(\Omega) = \sum_{\{i|1 \leq i \leq n\}} p_i = 1$.

3. Vérifions $\mathbb{P}_2$. Soient A et B deux événements incompatibles. Alors $\{i|w_i \in A \cup B\} = \{i|w_i \in A\} \sqcup \{i|w_i \in B\}$. Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= \sum_{\{i|w_i \in A \cup B\}} p_i = \sum_{\{i|w_i \in A\}} p_i + \sum_{\{i|w_i \in B\}} p_i \\ &= p(A) + p(B). \end{aligned}$$

Conclusion : Si $(p_1, \ldots, p_n)$ vérifie $\sum_1^n p_i = 1$, alors, il existe une unique probabilité $p : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $p(\{\omega_i\} = p_i$. ▲

Remarque : La démonstration du **Théorème** 30.5 montre que si le n-uplet $(p_1, \ldots, p_n)$ vérifie $\sum_1^n p_i = 1$, il existe une **unique** probabilité $p : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $p(\{\omega_i\} = p_i$. Elle est donnée par la formule :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad p(A) = \sum_{\{i|w_i \in A\}} p_i. \tag{29.3}$$

Définition : *Soit $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p\big)$ un espace probabilisé. La fonction*

$$\begin{array}{rccc} \rho & : & \Omega & \to & [0,1] \\ & & \omega & \mapsto & p(\omega) \end{array}$$

est parfois appelée ***fonction de poids****.*

Exemple : Soit $\Omega = \{a,b,c,d\}$. On définit une probabilité sur Ω en posant : $p(\{a\}) = 1/2,\ p(\{b\}) = 1/4; p(\{c\} = 1/4,\ p(\{d\}) = 0$

Vocabulaire : Dans l'exemple ci-dessus, on peut noter que les événements $\{b\}$et $\{c\}$ ont même probabilité. On dit qu'ils sont **équiprobables**. L'événement $A = \{a,b,c\}$ a la probabilité 1 d'être réalisé. On dit que A est **p-quasi certain**. En revanche l'événement $\{d\}$ a la probabilité 0 d'être réalisé. On dit que $\{d\}$ est **p-négligeable**.

4.a Retour à l'exemple fondamental

Proposition 29.6.— Soit $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p\big)$ un espace probabilisé fini. Supposons que les événements élémentaires soient équiprobables, alors p est la probabilité uniforme sur Ω.

Démonstration ▽
Notons $n = \mathsf{Card}\ \Omega$, de sorte que $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Par hypothèse les événements élémentaires $\{\omega_i\}$ sont équiprobables, notons $\kappa \in [0,1]$ leur probabilité commune. D'après le **Théorème** 30.5 κ vérifie $\sum_1^n \kappa = 1$. D'où nécessairement, $\kappa = \frac{1}{n} = 1/\mathsf{Card}\ \Omega$. Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$p(\{\omega_i\}) = 1/\mathsf{Card}\ \Omega.$$

Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, d'après (30.3),

$$p(A) = \frac{\mathsf{Card}\ A}{\mathsf{Card}\ \Omega}.$$

Donc p est la probabilité uniforme sur Ω. ▲

III Probabilités conditionnnelles

1 Introduction

Superman au casino :
Considérons l'expérience aléatoire suivante : au casino, le croupier sort une carte au hasard d'un jeu de 32 cartes. Le joueur gagne s'il obtient une figure de couleur rouge.
Notons Ω l'ensemble des résultats possibles. Comme les événements élémentaires sont équiprobables, Ω est muni de la probabilité uniforme.
Considérons les événements A "*la carte est une figure*" et B "*la carte est de couleur rouge*". Comme $A = \{valet\cdot de\cdots, dame\cdot de\cdots, roi\cdot de\cdots, As\cdot de\cdots\}$ et $B = \{\cdots de\cdot coeur, \cdots de\cdot carreau\}$, on a $\mathsf{Card}\ A = 16$, $\mathsf{Card}\ B = 16$ et $\mathsf{Card}\ (A \cap B) = 8$, et donc

$$p(A \cap B) = \frac{8}{32}$$

J'ai donc une chance sur quatre de gagner.
Je renouvelle l'expérience mais *Superman* à mes côtés me dévoile que la première carte du sabot est de couleur rouge !
Ainsi, l'univers des possibles a changé. Désormais, l'ensemble des résultats possibles se restreint aux cartes de couleur rouge, c'est-à-dire $\Omega' = B$. Comme les événements élémentaires de Ω' sont équiprobables, je munis Ω' de la probabilité uniforme, notée p'. Pour l'emporter, il me suffit maintenant de tirer un figure [10]...

$$p'(A) = \frac{\mathsf{Card}\ (A \cap B)}{\mathsf{Card}\ B} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{1}{2}.$$

On notera $p_B(A)$, cette **probabilité de A sachant B**.

2 Probabilité conditionnelle

Définition : *Soient $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p\big)$ un espace probabilisé et $B \subset \Omega$ un événement non négligeable* [11]*. Pour tout événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on définit la* ***probabilité conditionnelle de A sachant B*** *par :*

$$\boxed{p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}}$$

Notation : *On note aussi $p(A|B)$ la probabilité de A sachant B.*

10. Merci *Superman !*
11. i.e. $p(B) > 0$

Proposition 29.7.— Soient $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p\big)$ un espace probabilisé et $B \subset \Omega$ un événement non négligeable. L'application $p_B : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ qui à tout événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ associe $p_B(A)$ définie comme ci-dessus, est une probabilité sur Ω.

Démonstration ▽ **1.** Montrons que $p_B : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$. Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, comme p est une probabilité, nous avons, d'après le **Théorème** 30.2, $0 \leq p(A \cap B) \leq p(B)$. En divisant par $p(B) > 0$ nous obtenons $p_B(A) \in [0,1]$.

2. p_B vérifie (p_1) car $p_B(\Omega) = \dfrac{p(B)}{p(B)} = 1$.

3. Finalement, montrons que p_B vérifie (p_2). Soit donc A_1 et A_2 deux événements incompatibles, c'est-à-dire $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. *A fortiori* les événements $A_1 \cap B$ et $A_2 \cap B$ sont aussi incompatibles, donc

$$p\big((A_1 \cup A_2) \cap B\big) = p\big((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)\big) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B)$$

En divisant par $p(B) > 0$ nous obtenons le résultat annoncé.

▲

Comme annoncé plus haut, les probabilités conditionnelles sont utiles pour calculer la probabilité d'une intersection.

Corollaire 29.8.— Soit $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p\big)$ un espace probabilisé. Pour tous événements A et B tels que $p(B) > 0$,

$$\boxed{p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)}$$

Exercice : On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune a boules blanches et b boules noires. On tire au hasard une boule de l'urne U_1, on note sa couleur, puis on la met dans l'urne U_2. On tire de nouveau au hasard une boule de l'urne U_2 cette fois. Quelle est la probabilité que les deux boules obtenues soient blanches ?

Solution ▽
Notons B_i pour $i = 1ou2$ l'événement "la boule sortie de l'urne U_i est de couleur blanche". On cherche $p(B_1 \cap B_2$. On a $p(B_1) = \frac{a}{a+b}$, tandis que $p_{B_1}(B_2) = \frac{a+1}{a+b+1}$. D'où finalement :

$$p(B_1 \cap B_2) = \frac{a}{a+b} \times \frac{a+1}{a+b+1}.$$

▲

Plus généralement pour calculer la probabilité de l'intersection d'une famille finie d'événements, nous disposons de la :

3 Formule des probabilités composées

Proposition 29.9.— Formule des probabilités composées
Soient $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p\big)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements tels [12]que $p(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors

$$\boxed{p\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) = p(A_1) \times p(A_2|A_1) \times \cdots \times p(A_n \,|\, A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})}$$

Commentaires : Cette formule est très intuitive, si nous souhaitons calculer la probabilité que les événements $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, soient simultanément réalisés, il faut

tout d'abord que A_1 soit réalisé,

puis maintenant que l'on **sait que** A_1 **est réalisé**, il faut que A_2 soit réalisé,

puis maintenant que l'on **sait que** A_1 **et** A_2 **sont réalisés** il faut que A_3 soit réalisé, *etc...*

Démonstration ▽
La preuve sera par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Notons pour $n \geq 2$ $P(n)$ la propriété :

pour toute famille $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ d'événements tels que $p(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})\neq 0$ la formule des probas composées est vraie.

Initialisation : Lorsque $n=2$ la formule des probabilités composées se réduit au **Corollaire** 30.8.
Hérédité : Soit $n\geq 2$ tel $P(n)$, et considérons une famille $(A_i)_{1\leq i\leq n+1}$ d'événements. Grâce à l'associativité et à la commutativité de l'intersection, nous déduisons de l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} p\big(A_1\cap\cdots\cap A_n\cap A_{n+1}\big) &= p\big(A_{n+1}|A_1\cap\cdots\cap A_n\big)\times p\big(A_1\cap\cdots\cap A_n\big)\\ &= p(A_1)\times p(A_2|A_1)\times\cdots\times p\big(A_n\,|\,A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}\big)\times p\big(A_{n+1}|A_1\cap\cdots\cap A_n\big). \end{aligned}$$

Conclusion : Par récurrence nous avons démontré que la formule des probabilités composées est valide pour toute famille finie d'événements. ▲

Exercice : Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires. Trois boules sont tirées successivement et sans remise dans l'urne. Quelle est la probabilité pour que la première boule soit blanche, la deuxième et la troisième sont noires ?

Solution ▽
Choix d'un modèle : $U=\{b_1,b_2,b_3,n_1,n_2\}$ et $\Omega=\mathcal{A}(3,U)$ est muni de la probabilité uniforme.
Notons B_i (resp. N_i) l'événement la $i^{ème}$ boule tirée est blanche (resp.noire). On cherche $p(B_1\cap N_2\cap N_3)$.
'après la formule des probabilités composées, il vient :

$$p(B_1\cap N_2\cap N_3)=p(B_1)\times p_{B_1}(N_2)\times p_{B_1\cap N_2}(N_3)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}.$$

▲

4 Formule des probabilités totales

Rappelons qu'une famille $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ d'événements est appelée un système complet d'événements si elle forme une partition de Ω. Ainsi, tout événement B se décompose [13] sous la forme

$$B=(B\cap A_1)\cup\cdots\cup(B\cap A_n).$$

Concrètement un sytème complet d'événements est une discussion **exhaustive** de cas.

Exemple : Bien sûr [14] pour tout événement $A\in\mathscr{P}(\Omega)$, $(A,\bar{A})$ est un système complet d'événements.

Proposition 29.10.— Formule des probabilités totales
Soient $\big(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),p\big)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'événements.
Pour tout événement $B\in\mathscr{P}(\Omega)$,

$$\boxed{p(B)=\sum_{i=1}^{n}p(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n}p(A_i)\times p_{A_i}(B)}$$

Démonstration ▽
Ecrivons $B=(B\cap A_1)\cup\cdots\cup(B\cap A_n)$, comme les A_i forment un système complet d'événements, cette réunion est disjointe, c'est-à-dire que les événements $(B\cap A_i)_{1\leq i\leq n}$ sont deux à deux incompatibles. Nous pouvons donc appliquer la formule de Poincaré (**Théorème** 30.3), il vient :

$$p(B)=\sum_{i=1}^{n}p(B\cap A_i). \tag{29.4}$$

D'autre part, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ fixé, nous avons d'après le **Corollaire** 30.8,

$$p(B\cap A_i)=(A_i)\times p_{A_i}(B).$$

Il suffit alors de réinjecter [15] cette dernière expression dans (30.4), pour obtenir la formule des probabilités totales. ▲

Exercice : Un lot contient une proportion $p\in]0,1[$ de dés pipés, pour lesquels la probabilité d'obtenir un 6 est de $1/2$. On prend un dé *au hasard* dans le lot et on le lance. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?

13. distributivité de $\cap$ sur $\cup$
14. d'après la caractérisation du complémentaire : **Proposition** 6.2
15. n'est-ce pas Picot ?

Solution ▽
Notons D l'événement "le dé choisi est pipé". Il est clair que $(D, \bar{D})$ est un sytème complet d'événements. Comme $p(D) = p$ et $p(\bar{D}) = 1 - p$, il résulte de la formule des probabilités totales que

$$p(\{6\}) = (1/2) \times p + (1/6) \times (1 - p) = \frac{1}{6} + \frac{p}{3}.$$

▲

5 Formule de Bayes

Imaginez qu'on souhaite apprécier la fiabilité d'un test médical. On fait passer le test à une population de "*cobayes humains*".
Notons M l'événement "*l'individu est malade*" et T l'événement "*le test est positif*".
En laboratoire, il est facile de déterminer

1. la probabilité que le test soit positif sur un individu malade : $p_M(T)$,

2. la probabilité que le test soit positif sur un individu sain : $p_{\bar{M}}(T)$,

3. et la probabilité d'être malade $p(M)$.

La question qui se pose avant de lancer le test sur le marché c'est de connaître la probabilité qu'un individu soit malade sachant que son test est positif, c'est-à-dire $p_T(M)$?

Pour répondre à cette question, il faut en quelque sorte *retourner les conditionnements.*
On procède de la manière suivante :

$$p_T(M) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} = \frac{p(M) \times p_M(T)}{p(T)}.$$

Finalement, utilisons la formule des probabilités totales pour le sytème complet d'événements $(M, \bar{M})$ au dénominateur, il vient :

$$p_T(M) = \frac{p(M) \times p_M(T)}{p(M) \times p_M(T) + p(\bar{M}) \times p_{\bar{M}}(T)}.$$

On peut généraliser cette formule de *retournement des conditionnements :*

Proposition 29.11.— FORMULE DE BAYES
Soient $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p\big)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements.
Pour tout événement B non négligeable, et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$p(A_j \mid B) = \frac{p(A_j) \times p(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} p(A_i) \times p(B \mid A_i)}$$

IV Indépendance en probabilité

1 Indépendance de deux événements

Soient $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p\big)$ un espace probabilisé et A, B deux événements. Intuitivement, on dira que A et B sont indépendants si la réalisation de B ne change rien pour A. Autrement dit si $p_B(A) = p(A)$. Or lorsque $p(B) \neq 0$ nous avons les équivalences :

$$\begin{aligned} p_B(A) = p(A) &\overset{p(B)\neq 0}{\iff} \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A) \\ &\overset{p(B)\neq 0}{\iff} p(A \cap B) = p(A) \times p(B). \end{aligned}$$

Ceci conduit à adopter la définition suivante :

Définition : *Soient $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p\big)$ un espace probabilisé. Deux événements A et B sont dits* ***indépendants pour la probabilité*** *p si*

$$\boxed{p(A \cap B) = p(A) \times p(B)}$$

En particulier, si $p(B) \neq 0$, A et B sont stochastiquement indépendants si et seulement si $p_B(A) = p(A)$.

Remarque : *Contrairement à l'idée intuitive* que nous pouvons en avoir, la notion d'indépendance de deux événements *dépend* de la probabilité qui équipe Ω. Cependant, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la probabilité p, on dira simplement que A et B sont indépendants.

L'exemple suivant montre qu'effectivement deux événements peuvent être ou non indépendants selon la probabilité choisie :

Exemple : On effectue l'**expérience 1**. On munit $\Omega = [\![1, 6]\!]$ de la probabilité :

p_1 probabilité uniforme sur Ω

p_2 probabilité "dé pipé" définie par $p_2(6) = 1/3$, $p_2(5) = p_2(4) = 1/6$ et $p_2(1) = p_2(2) = p_2(3) = 1/9$.

On considère les événements $A = \{4, 5\}$ et $B = \{5, 6\}$, de sorte que $A \cap B = \{5\}$.

Si Ω est muni de la probabilité uniforme :
$p_1(A) = p_1(B) = 1/3$ tandis que $p_1(A \cap B) = 1/6$. Par conséquent, $p_1(A) \times p_1(B) \neq p_1(A \cap B)$. Donc
Les événements A et B ne sont pas indépendants pour p_1.

Si Ω est muni de la probabilité "dé pipé" :
$p_2(A) = 1/6+1/6 = 1/3$, $p_2(B) = 1/3+1/6 = 1/2$, $p_2(A \cap B) = 1/6$. En ce cas, $p_2(A) \times p_2(B) = p_2(A \cap B)$. Donc
Les événements A et B sont indépendants pour p_2.

Exercice : On considère une famille avec des enfants. On suppose qu'il y a équiprobabilité de la répartition des sexes.

1. On suppose qu'il y a deux enfants. Etudier l'indépendance des événements :
- A "*la famille a des enfants des deux sexes*".
- B "*la famille a au plus un garçon*".

2. On suppose que la famille compte trois enfants. Etudier l'indépendance des événements A et B définis ci-dessus.

Proposition 29.12.— Soient $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p\big)$ un espace probabilisé et A, B deux événements **indépendants** pour la probabilité p, alors

1. les événements A et $\bar{B}$ sont indépendants.

2. les événements $\bar{A}$ et B sont indépendants.

3. les événements $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

COMMENTAIRES : Intuitivement, cela paraît clair, mais notre intuition nous a déjà trompé...

Démonstration ▽
Soient A et B des événements indépendants : vérifions que A et $\bar{B}$ sont indépendants.
D'après le **Théorème** 30.2, nous avons

$$\begin{aligned} p(A \cap \bar{B}) &= p\big(A \setminus B)\big) \\ &= p(A) - p(A \cap B) \\ &= p(A) - p(A) \times p(B) \\ &= p(A) \times \big(1 - p(B)\big). \end{aligned}$$

Les autres assertions en résultent facilement. ▲

Remarque : Intuitivement, on pourrait aussi penser que deux événements incompatibles sont indépendants. Il n'en est rien, bien au contraire : si A et B sont deux événements incompatibles de probabilité $p(A), p(B)$ non nulles, alors les événements A et B ne sont pas incompatibles.

2 Indépendance mutuelle de plusieurs événements

La généralisation de la notion d'indépendance à trois (ou plus) événements révèle aussi une difficulté. Deux notions paraissent naturelles lorsqu'on réfléchit à l'indépendance d'une famille de trois événements :

On dira que trois événements A,B,C ont la propriété *Solenn* si :

$$p(A\cap B)=p(A)\times p(B),\ p(B\cap C)=p(B)\times p(C),\ p(A\cap C)=p(A)\times p(C).$$

On dira que trois événements A,B,C ont la propriété *Julien* si :

$$p(A\cap B\cap C)=p(A)\times p(B)\times p(C).$$

On pourrait s'attendre à ce que la propriété *Julien* entraîne automatiquement *Solenn* et que réciproquement *Solenn* entraîne *Julien*. Il n'en est rien, comme le montrent les exemples qui suivent :

L'implication *Julien*$\Rightarrow$ *Solenn* est fausse

Reprenons l'**expérience 1** et notons $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$ et $C=\{1,2,4,5\}$.
Nous avons d'une part

$$p(A\cap B\cap C)=p(\{2\})=1/6$$

et d'autre part

$$p(A)\times p(B)\times p(C)=1/2\times 1/2\times 4/6=1/6.$$

Ainsi les événements A, B et C vérifient la relation -de *Julien*- $p(A\cap B\cap C)=p(A)\times p(B)\times p(C)$.

Pourtant les événements A et B ne sont pas indépendants puisque $p(A\cap B)=1/3$ tandis que $p(A)\times p(B)=1/4$.
Les événements A,B, C ne vérifient donc pas la propriété *Solenn*

L'implication *Solenn*$\Rightarrow$ *Julien* est fausse

Reprenons l'**expérience 2** et notons

- A l'événement " *on obtient 6 au premier lancer*",
- B l'événement " *on obtient 6 au deuxième lancer*", et enfin
- C l'événement "*les résultats obtenus aux deux lancers sont égaux*".

On vérifie aisément que

$$p(A)=p(B)=p(C)=1/6$$

$$p(A\cap B)=p(A\cap C)=p(B\cap C)=p(\{(6,6)\})=1/36$$

Ainsi les trois événements A,B, C vérifient-ils la propriété *Solenn*.

Pourtant $p(A\cap B\cap C)=p(\{(6,6)\})=1/36$, tandis que $p(A)\times p(B)\times p(C)=6^{-3}$. Donc les événements A,B, C ne vérifient pas la propriété *Julien*.

Ainsi, il n'est pas d'autre choix pour la définition de l'indépendance de trois événements que de supposer que ces trois ensembles vérifient **à la fois** les propriétés *Solenn* et *Julien*. Plus précisément, cette discussion conduit à adopter la définition suivante :

Définition : *Soient* $\big(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),p\big)$ *un espace probabilisé et* $(A_1,\dots,A_n)\in\mathscr{P}(\Omega)^n$ *une famille d'événements. On dit que les événements sont* ***mutuellement indépendants*** *si :*

$$\boxed{\text{pour tous } i_1,\dots,i_k\in[\![1,n]\!],\quad p\big(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\big)=p(A_{i_1})\times\cdots\times p(A_{i_k})}$$

Cette définition est plus contraignante que celles envisagées de prime abord, mais se trouve pleinement justifiée par la proposition suivante :

Proposition 29.13.— Soient $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p\big)$ un espace probabilisé et $(A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$ une famille d'événements **mutuellement indépendants**.
Toute *sous-famille* $(A_{i_1}, \dots, A_{i_k})$ $(k \leq n)$ est formée d'événements **mutuellement indépendants**.

Démonstration ▽
C'est précisément la définition de famille d'événements mutuellement indépendants. ▲

La **Proposition** 30.12 se généralise aux familles finies d'événements mutuellement indépendants :

Proposition 29.14.— Soient $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p\big)$ un espace probabilisé et $(A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$ une famille d'événements **mutuellement indépendants**.
Soient $(B_1, \dots, B_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$ une famille d'événements tels que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \bar{A}_i$. Alors les événements $B_1, \dots, B_n$ sont mutuellement indépendants.