Chapitre 4

Fonctions usuelles

Sommaire

OBJECTIFS

Après ce chapitre, vous devrez connaître
- les domaines de définition ;
- les domaines de dérivabilité et les dérivées ;
- les tableaux de variations ;
- les limites et croissances comparées ;
- les graphes ;
- les règles de calcul (formules de trigo, exponentielle d'une somme, etc...)

des fonctions usuelles : $\ln, \exp, p_\alpha, \mathrm{ch}\,, \mathrm{sh}\,, \mathrm{th}\,, \sin, \cos, \tan, \mathrm{Arcsin}\,, \mathrm{Arccos}\,, \mathrm{Arctan}\,.$

Introduction

D'un point de vue *théorique*, l'ensemble $\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$ est vraiment très vaste. Pensez que même dans le cas où I est réduit à un singleton [1], l'ensemble des fonctions de $\{a\}$ dans $\mathbf{R}$ est $\mathbf{R}$.
Pourtant, **en pratique**, les fonctions que nous rencontrons sont construites à partir de quelques unes seulement :
- les *fonctions polynomiales* et les *fractions rationnelles* (quotient de deux polynômes),
- les fonctions *exponentielles*, *logarithmes*, *puissances*,
- les *fonctions trigonométriques*.

Les procédés de construction sont eux aussi bien définis et restreints en première année, il peut s'agir :
- d'opérations algébriques(somme, produit, quotient, puissance d'exposant entier)
- de compositions,
- d'application réciproque d'une bijection,
- ou bien encore de primitive de telles fonctions

C'est la raison pour laquelle vous devez connaître *parfaitement* :
- ▸ les *règles de calculs* pour ces fonctions usuelles ;
- ▸ les *dérivées* de ces fonctions usuelles qui seront utiles pour le calcul de primitives ;
- ▸ les *graphes* et *tableaux de variations* de ces fonctions car ils contiennent des renseignements fins (symétries, limites, tangentes, convexité) qui seront développés ultérieurement.
- ▸ les limites de référence qui permettent de lever les indéterminations.

I Fonctions polynomiales, rationnelles et racines

1 Fonctions polynomiales

1.a Définition

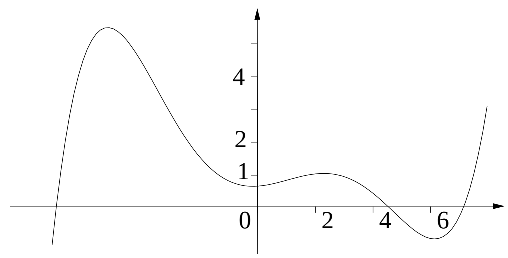
Définition : *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Une fonction $P : I \to \mathbf{R}$ est dite **polynomiale** s'il existe $n \in \mathbf{N}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tels que $a_n \neq 0$ et*

$$\text{pour tout } x \in I, \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Vocabulaire :
- *$(a_0, a_1, \dots, a_n)$ s'appellent les **coefficients** de P ;*
- *l'entier n est appelé le **degré** du polynôme ;*
- *le réel a_n est appelé le **coefficient dominant** ;*
- *le monôme $a_n x^n$ est le **monôme dominant**.*

1. Il s'agit d'un cas exclu de notre discussion, tellement il est simple...

Illustration : graphe d'une fonction polynomiale de degré 5.



1.b Propriétés

Proposition 4.1.— Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, on considère la fonction **puissance d'exposant** n :

$$p_n : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$

p_n est paire si n est pair, et impaire si n est impair. De plus, p_n est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R},\ p_n'(x) = nx^{n-1}.}$$

Démonstration $\triangledown$
Soit $a \in \mathbf{R}$, pour calculer la limite des taux de variations au point a, on effectue le changement de variable $x = a + h$. À l'aide de la **formule du binôme**, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{p_n(a+h) - p_n(a)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}h^k - a^n\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}h^k\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}h^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}a^{n-1-k}h^k \end{aligned}$$

Cette dernière fonction est polynomiale en h : en particulier, elle est continue en 0. Elle admet donc une limite lorsque h tend vers 0 et

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{p_n(a+h) - p_n(a)}{h} = \binom{n}{1}a^{n-1} = n\,a^{n-1}$$

Nb : une autre démonstration de ce résultat, utilisant l'**identité géométrique** a été donnée au **chapitre précédent**. ▲

Exercice : Dérivées successives de p_n —. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, $x \in \mathbf{R}$. Montrez que

- si $k \in [\![0, n]\!]$, $p_n^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!}\,x^{n-k}$
- si $k > n$, $p_n^{(k)}(x) = 0$.

Il en résulte que p_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $k > n$, $p_n^{(k)} = 0$. Plus généralement toute fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle de définition.

2 Fonctions racines

En particulier, pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbf{N}$, p_n' est strictement positive sur $\mathbf{R}^{+\star}$. p_n induit donc une application strictement croissante et continue de $\mathbf{R}^+$ sur $\mathbf{R}^+$. D'après le **Théorème de la bijection**, p_n réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur l'intervalle $J = \left[\lim\limits_{x \to 0} p_n(x),\ \lim\limits_{x \to +\infty} p_n(x)\right[= [0, +\infty[$. En conséquence :

Proposition 4.2.— $p_{n|}$: $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^+ & \to & \mathbf{R}^+ \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$ est une bijection continue et strictement croissante. Son application réciproque est la fonction racine $n^{\text{ième}}$ r_n : $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^+ & \to & \mathbf{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$. r_n est continue sur $\mathbf{R}^+$, dérivable sur $\mathbf{R}^{+\star}$ et

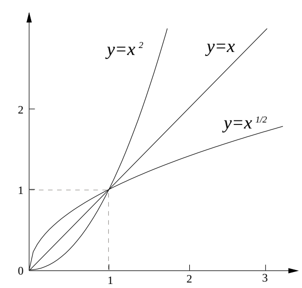
$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R}^{+\star},\ r_n'(x) = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}}$$

Démonstration ▽
Seule reste à établir la dérivabilité de la racine $n^{\text{ième}}$. Comme p_n est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée strictement positive, la **Proposition** 3.17 s'applique et donne :

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{p_n'\left(\sqrt[n]{x}\right)} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$$

▲

Illustration : graphes de $p_{n|}$ et de $\sqrt[n]{\cdot}$



3 Fonctions rationnelles

3.a Définition

Définition : *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Une fonction $R : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dite **rationnelle** s'il existe deux applications polynomiales P, Q définies sur I telles que Q n'est pas la fonction constante égale à 0 et en tout point $x \in I$ tel que $Q(x) \neq 0$, $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.*

3.b Proposition

Proposition 4.3.— Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, la fonction $q_n : \mathbf{R}^{+\star} \to \mathbf{R}^{+\star}$ définie pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$ par $q_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$ est une bijection strictement décroissante. Elle est dérivable sur $\mathbf{R}^{+\star}$ et

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R}^{+\star},\ q_n'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}}$$

Notation : *On note bien sûr $q_n(x) = \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$.*

Exercice : Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Déterminez les primitives de q_n.

II Fonctions logarithmes et exponentielles

1 Fonction logarithme népérien

1.a Définition

Proposition.— Fonction logarithme népérien —. La fonction $q_1 : \mathbf{R}^{+\star} \to \mathbf{R}^{+\star}$ qui à tout nombre réel $x > 0$ associe son inverse $1/x$ est continue. On note ln l'unique primitive de q_1 s'annulant au point 1. C'est-à-dire :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R}^{+\star}, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.}$$

Interprétation graphique : À l'aide de la définition intuitive de l'intégrale, on peut visualiser le nombre $\ln(a)$. Dans la figure ci-contre, $\ln(a)$ représente l'aire algébrique de la région du plan délimitée par les droites d'équations cartésiennes $x = 1$, $x = a$, $y = 0$, et le graphe de la fonction inverse.

1.b Propriétés

Proposition 4.4.— Propriétés du logarithme népérien —. $\ln : \mathbf{R}^{+\star} \to \mathbf{R}$ est continue et dérivable sur $\mathbf{R}^{+\star}$ et

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R}^{+\star}, \quad (\ln)'(x) = \frac{1}{x}}$$

De plus, la fonction ln réalise une **bijection strictement croissante** de $\mathbf{R}^{+\star}$ sur $\mathbf{R}$.

Conséquence : comme la fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^{+\star}$, il en résulte que $\ln \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{+\star}, \mathbf{R})$.

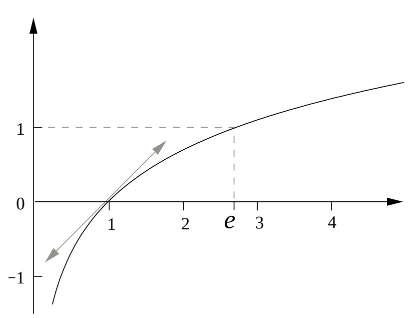
Démonstration $\triangledown$
Par définition ln est dérivable $\mathbf{R}^{+\star}$, et pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$, $\quad (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$. Sa dérivée étant strictement positive, la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbf{R}^{+\star}$.
La preuve sera complète, lorsque nous aurons calculé les limites aux bornes de la fonction ln. Admettons-les un instant, nous pouvons compléter le tableau de variation de ln :

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$		$+$	1	$+$	
$\ln(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

En effet, d'après le **théorème de la bijection**, ln étant continue et strictement croissante, elle réalise une bijection de $\mathbf{R}^{+\star}$ sur l'intervalle des images $]\lim_{0^+} \ln; \lim_{+\infty} \ln x[=] - \infty; +\infty[$. ▲

Remarque : Puisque la fonction ln est une bijection de $\mathbf{R}^{+\star}$ sur $\mathbf{R}$, il existe un unique nombre positif, noté e, tel que $\ln(e) = 1$. Le nombre e est voisin de 2,7.

1.c Graphe de la fonction logarithme néperien



- La tangente au point $x = 1$ a pour équation $y = x - 1$
- La tangente au point e a pour équation $y = \dfrac{x}{e}$.

1.d Règles de calcul pour la fonction logarithme

Théorème 4.5.— Règles de calcul pour les logarithmes

- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$
- Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R}^{+\star}$, $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$;
- Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R}^{+\star}$, $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$;
- Pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$, $\ln(1/x) = -\ln(x)$;
- Pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$, $n \in \mathbf{Z}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$;

Vocabulaire : *on résume ces propriétés en disant que* $\ln$ *est un morphisme du groupe multiplicatif* $\mathbf{R}^{+\star}, .)$ *sur le groupe additif* $(\mathbf{R}, +)$.

Commentaires : ces règles de calcul sont **fondamentales** et doivent être parfaitement maîtrisées. D'ailleurs, on peut démontrer que la fonction logarithme est la seule fonction $f : \mathbf{R}^{+\star} \to \mathbf{R}$, croissante telle que $f(e) = 1$ vérifiant l'*équation fonctionnelle* :

$$\text{pour tout } (x, y) \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R}^{+\star}, \quad f(x \times y) = f(x) + f(y).$$

Démonstration ▽

- Découle directement de la définition
- Montrons que pour tout couple (x, y) de réels strictement positifs, $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$.

Soit $y \in \mathbf{R}^{+\star}$ fixé. On considère la fonction $f_y : \mathbf{R}^{+\star} \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbf{R}^{+\star}, f_y(x) = \ln(y \times x).$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbf{R}^{+\star}$ de dérivée $f_y'(x) = \dfrac{1}{yx} \times y = \dfrac{1}{x}$. Ainsi les deux fonctions ln et ln ont même dérivée. Cela signifie que la fonction $h = f_y - \ln$ est constante sur l'intervalle $\mathbf{R}^{+\star}$ (car sa dérivée est nulle). Ainsi, il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que pour tout nombre réel $x > 0$ on a :

$$f_y(x) = \ln x + C.$$

Pour déterminer C évaluons cette dernière égalité *fonctionnelle*[2] au point $x = 1$. Il vient $C = f_y(1) = \ln y$. Par conséquent, nous avons démontré que

$$\text{pour tout } y > 0, \text{ pour tout } x > 0, \quad \ln(y \times x) = \ln y + \ln x.$$

- Découle directement de la construction de la fonction de ln.

Soit $x > 0$, de l'égalité $1 = x \times 1/x$, nous déduisons $\ln 1 = \ln(x \times 1/x) = \ln x + \ln(1/x)$ ■ Lorsque $n \in \mathbf{N}$, la démonstration se fera par récurrence :
Initialisation : Lorsque $n = 0$, $\ln x^0 = \ln 1 = 0$ et $0 \times \ln x = 0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$, tel que pour tout $x > 0$, $\ln x^n = n \ln x$. Alors

$$\ln x^{n+1} = \ln(x^n\ x) = \ln x^n + \ln x = n \ln x + \ln x = (n + 1) \ln x$$

Conclusion : Nous avons prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $x > 0$, $\quad \ln x^n = n\ \ln x$.
Enfin, si $n \in \mathbf{Z}^-$, $\ln x^n = \ln(1/x^{-n}) = -\ln x^{-n} = n \ln x$.

- Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R}^{+\star}$. D'après 2. $\ln(x/y) = \ln(x) + \ln(1/y)$. Or d'après 4. $\ln(1/y) = -\ln y$, d'où le résultat. ▲

Exercice : Montrez que pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\ln \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n} \ln x$.

1.e Limites de la fonction logarithme

Proposition 4.6.— limites de la fonction logarithme

- $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\displaystyle\lim_{x \to a} \ln x = \ln a$
- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

2. *i.e.* entre fonctions

Démonstration $\triangledown$

Au voisinage de $+\infty$ **:** soit $n \in \mathbf{N}$, alors $\ln 2^n = n \ln 2 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Ainsi, par croissance de ln, **si** $x \geq 2^n$, **alors** $\ln x \geq n \ln 2$.
En clair, $\ln x$ est arbitrairement grand, pourvu que x soit suffisamment grand, *that is* $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Au voisinage de 0^+ **:** on se ramène au voisinage de $+\infty$, au moyen du changement de variable $y(x) = \dfrac{1}{x}$.

On a
- $\lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = 0$
- $\lim\limits_{y\to+\infty} \ln(y) = +\infty$

. Par composition des limites, il en résulte que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(1/x) = +\infty$.

Or, d'après la **Proposition** 4.5, on a $\ln(1/x) = -\ln(x)$. Par opérations algébriques sur des fonctions admettant une limite, il vient finalement $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$. ▲

Exercice : Démontrez l'encadrement suivant pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, $\quad x - \dfrac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$.

Remarque : en Sciences de l'Ingénieur comme en Sciences Physiques et Chimie, on utilise souvent le **logarithme décimal**. Il est défini par

$$\text{Pour tout } x \in \mathbf{R}^{+\star}, \quad \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Défi ! Montrez que le nombre de chiffres nécessaires à l'écriture d'un entier $n \in \mathbf{N}^\star$ en base 10 est

$$m = \lfloor \log(n) \rfloor + 1$$

2 Fonction exponentielle

2.a Définition

Il s'agit très certainement de la fonction la plus importante des mathématiques, même si elle n'apparaît ici que comme fonction réciproque de la fonction ln. Il existe d'autres constructions de cette fonction qui lui rendent la place essentielle qu'elle mérite ! Par exemple, en terminale, vous avez introduit la fonction exponentielle comme solution du problème de **Cauchy** $\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & y \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right.$.

Proposition-Définition 4.7.— Fonction exponentielle —. La fonction $\ln : \mathbf{R}^{+\star} \to \mathbf{R}$ est une bijection strictement croissante. Son application réciproque est la fonction $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{+\star}$. Elle vérifie pour tout couple de réels :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x \in \mathbf{R} \\ y = \exp(x) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y \in \mathbf{R}^{+\star} \\ x = \ln(y) \end{array}\right.}$$

2.b Propriétés

Proposition 4.8.— La fonction $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{+\star}$ est une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}^{+\star}$. Elle est dérivable dans $\mathbf{R}$ et

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R} \quad (\exp)'(x) = \exp(x)}$$

Remarques :

1. Des égalités $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$ découlent $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$.
2. Comme exp est dérivable et que sa dérivée est elle-même, elle est donc indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$.

Notation : *nous noterons aussi* $\exp(x) = e^x$. *Cette égalité sera justifiée plus loin.*

Démonstration $\triangledown$

$\ln : \mathbf{R}^{+\star} \to \mathbf{R}$ est dérivable et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$. Ainsi, $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{+\star}$ est dérivable comme fonction réciproque d'une bijection dérivable dont la dérivée ne s'annule pas (**Proposition** 3.17). De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}^\star$,

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \exp(x)$$

2.c Règles de calcul

Théorème 4.9.— Règles de calcul pour les exponentielles

- $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$
- Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$
- Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\exp(x - y) = \exp(x)/\exp(y)$
- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\exp(-x) = 1/\exp(x)$
- Pour tout $x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}$, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

Vocabulaire : *on dit que* $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{+\star}$ *est un morphisme du groupe additif* $(\mathbf{R}, +)$ *sur le groupe multiplicatif* $(\mathbf{R}^{+\star}, .)$.

Démonstration ▽
Pour chacune des égalités proposées, vérifiez que les logarithmes des deux membres sont égaux. ▲

Exercice : Montrez que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sqrt[n]{\exp(x)} = \exp(x/n)$.

Commentaires : comme pour la fonction logarithme néperien, ces règles de calcul sont **fondamentales** car elles caractérisent la fonction exponentielle. Plus précisément, on peut démontrer :

Proposition 4.10.— La fonction exponentielle est l'unique fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{+\star}$, croissante qui vérifie

- $f(1) = e$
- pour tout $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $f(x + y) = f(x) \times f(y)$

Exercice : Résoudre dans $\mathbf{R}^2$, le système $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -15 \\ \ln(xy) = -2 \end{cases}$.

Exercice :

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $6 \times \exp(5x + 2) - 7 \times \sqrt{\exp(8x + 4)} + \exp(3x + 2) = 0$

2. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'inéquation $\exp(x) - 2 \times \exp(-x) + 1 < 0$

2.d Limites de la fonction exponentielle

Théorème 4.11.— Soit $a \in \mathbf{R}$

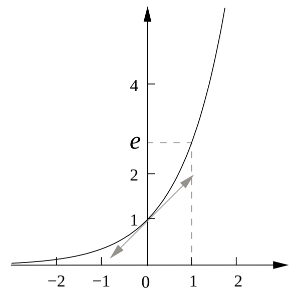
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp x = 0$
- $\lim\limits_{x \to a} \exp x = \exp a$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp x = +\infty$

Démonstration ▽
Étant l'application réciproque de ln, le théorème de la bijection montre que $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{+\star}$ est une bijection continue. En particulier, pour tout $a \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{x \to a} \exp(x) = \exp(a)$. De plus, on obtient facilement les limites aux bornes par identification :

- $\exp(]-\infty, +\infty[) =]0, +\infty[$
- $\exp(]-\infty, +\infty[) =]\lim\limits_{-\infty} \exp, \lim\limits_{+\infty} \exp[$. ▲

2.e Tableau de variation et graphe

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$	1	$+$	
$\exp(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



- la tangente en 0 a pour équation $y = 1 + x$
- La tangente au point 1, a pour équation $y = ex$

Remarque : Comme les fonctions exp et ln sont des bijections réciproques l'une de l'autre, leurs graphes sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

3 Fonctions puissances d'exposants réels

3.a Fonctions puissances d'exposants rationnels

- Lorsque $n \in \mathbf{N}$, nous avons défini la fonction puissance $n^{\text{ième}}$ sur $\mathbf{R}$ par

$$\begin{array}{rccl} p_n : & \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & p_n(x) = x^n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} x = \underbrace{x \times \cdots\cdots \times x}_{n \text{ fois}} \end{array}$$

- Si $n \in \mathbf{Z}^-$, nous pouvons définir $\begin{array}{rccl} p_n : & \mathbf{R}^\star & \to & \mathbf{R}^\star \\ & x & \mapsto & p_n(x) = x^n = (1/x)^{|n|} \end{array}$
- Soit $m \in \mathbf{N}^\star$, la fonction racine $m^{\text{ième}}$ est définie sur $\mathbf{R}^+$ par $\begin{array}{rccl} p_{\frac{1}{m}} : & \mathbf{R}^+ & \to & \mathbf{R}^+ \\ & x & \mapsto & p_{\frac{1}{m}}(x) = \sqrt[m]{x} \end{array}$
- Finalement, à l'aide des définitions précédentes, nous pouvons définir les fonctions puissances d'exposant un nombre rationnel $r = \frac{n}{m} \in \mathbf{Q}$, (où $(m, n) \in \mathbf{N}^\star \times \mathbf{Z}$) par $\begin{array}{rccl} p_r : & \mathbf{R}^{+\star} & \to & \mathbf{R}^{+\star} \\ & x & \mapsto & p_r(x) = \sqrt[m]{x^n} \end{array}$

3.b Définition des fonctions puissances d'exposants réels

Nous souhaitons maintenant étendre cette définition des fonctions puissances au cas d'exposants réels quelconques. Le *starting point* est la propriété suivante :

Lemme 4.12.— Pour tout nombre rationnel $r \in \mathbf{Q}$ et pour tout nombre réel strictement positif $a \in \mathbf{R}^{+\star}$,

$$\boxed{a^r = \exp(r \ln a)}$$

Démonstration ▽

Soit $a > 0$ un nombre réel et $r = n/m$ un nombre rationnel. D'après les règles de calcul pour les fonctions exponentielle et logarithme, nous pouvons écrire que

$$\begin{array}{rcl} \ln\big(\exp(r \ln a)\big) & = & r \ln a \\ \ln(a^r) & = & \ln\big(\sqrt[n]{a^m}\big) = m \ln\big(\sqrt[n]{a}\big) = \dfrac{m}{n} \ln a \end{array}$$

Par conséquent, a^r et $\exp(r \ln a)$ ont même logarithme. Comme ln est injective, ceci entraîne que $\exp(r \ln a) = \sqrt[n]{a^m} = a^r$.

▲

dans cette égalité le membre de gauche est un prolongement naturel de la fonction puissance entière puisqu'il s'agit d'une racine $n^{\text{ième}}$ d'une puissance $m^{\text{ième}}$, n et m étant des nombres entiers. Le membre de droite, plus abstrait, possède quant à lui la bonne propriété de conserver un sens même lorsque r est un réel quelconque.

La définition des puissances d'exposants réels se fonde sur cette remarque :

Définition : *Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ un réel quelconque, on appelle **puissance d'exposant** α la fonction $p_\alpha : \mathbf{R}^{+\star} \to \mathbf{R}^{+\star}$ définie par*

$$\boxed{\textit{pour tout } x > 0, \quad p_\alpha(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)}$$

3.c Propriétés des fonctions puissances d'exposants réels

Proposition 4.13.— Soit $\alpha \in \mathbf{R}^\star$, la fonction $p_\alpha : \mathbf{R}^{+\star} \to \mathbf{R}^{+\star}$ est une bijection strictement monotone et son application réciproque est $p_{1/\alpha}$. De plus p_α est dérivable sur $\mathbf{R}^{+\star}$ et

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R}^{+\star}, \quad p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}}$$

Commentaires : le lecteur attentif aura noté que ce résultat prolonge naturellement le calcul des dérivées d'une puissance entière.

Remarque : lorsque $\alpha = 0$, p_0 est la fonction constante égale à 1.

Démonstration $\triangledown$

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R}^{+\star}$, on a les équivalences

$$\begin{aligned} y = p_\alpha(x) \quad &\iff \quad y = \exp(\alpha \ln x) \\ &\iff \quad \ln x = \frac{1}{\alpha} \ln y \\ &\iff \quad x = \exp\big(\frac{1}{\alpha} \ln y\big) \end{aligned}$$

D'après le point de vue équation de la bijectivité, $x \mapsto p_\alpha(x)$ est bijective de $\mathbf{R}^{+\star}$ sur lui-même et $x \mapsto p_{1/\alpha}(x)$ est son application réciproque.

De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$, nous pouvons écrire grâce à la propriété de dérivation en chaîne :

$$\begin{aligned} p'_\alpha(x) &= \exp'(\alpha \ln x) \times \alpha \ln'(x) \\ &= \alpha \frac{\exp(\alpha \ln x)}{x} = \alpha \exp[(\alpha - 1) \ln x] = \alpha x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

▲

3.d Règles de calcul pour les fonctions puissances

Théorème 4.14.— Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$, $(x, y) \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R}^{+\star}$.

- $\ln\big(x^\alpha\big) = \alpha \ \ln x$
- $x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$
- $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$
- $\big(x^\alpha\big)^\beta = x^{\alpha\times\beta}$
- $x^\alpha \times y^\alpha = \big(x \times y\big)^\alpha$
- $\dfrac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha$

Démonstration $\triangledown$

- Par définition $x^\alpha = p_\alpha(x) = \exp(\alpha \ln x)$. En prenant le logarithme, il vient *at once* $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

$$\begin{array}{llll}
\blacksquare & x^\alpha \times x^\beta & = & \exp(\alpha\ln(x)) \times \exp(\beta\ln(x)) = \exp\left(\alpha\ln(x) + \beta\ln(x)\right) \\
& & = & \exp\left((\alpha+\beta)\ln(x)\right) = x^{\alpha+\beta} \\
\blacksquare & \dfrac{x^\alpha}{x^\beta} & = & \exp(\alpha\ln(x)) \times \exp(-\beta\ln(x)) = \exp\left(\alpha\ln(x) - \beta\ln(x)\right) \\
& & = & \exp\left((\alpha-\beta)\ln(x)\right) = x^{\alpha-\beta} \\
\blacksquare & \left(x^\alpha\right)^\beta & = & \exp\left(\beta\ln\left(x^\alpha\right)\right) = \exp\left(\beta\alpha\ln(x)\right) = x^{\alpha\beta} \\
\blacksquare & x^\alpha \times y^\alpha & = & \exp(\alpha\ln(x)) \times \exp(\alpha\ln(y)) = \exp\left(\alpha\ln(x) + \alpha\ln(y)\right) \\
& & = & \exp\left(\alpha\ln(xy)\right) = \left(x \times y\right)^\alpha \\
\blacksquare & \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha} & = & \dfrac{\exp(\alpha\ln(x))}{\exp(\alpha\ln(y))} = \exp\left(\alpha\ln(x) - \alpha\ln(y)\right) \\
& & = & \exp\left(\alpha\ln(x/y)\right) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha
\end{array}$$

▲

3.e Limites des fonctions puissances

Proposition 4.15.— Limites des fonctions puissances —. On suppose ici que $\alpha > 0$. Alors pour tout $a \in \mathbf{R}^{+\star}$

$$\boxed{\blacksquare \ \lim_{x\to 0^+} p_\alpha(x) = 0^+ \qquad \blacksquare \ \lim_{x\to a} p_\alpha(x) = p_\alpha(a) \qquad \blacksquare \ \lim_{x\to +\infty} p_\alpha(x) = +\infty}$$

Remarque : p_α est prolongeable par continuité en 0.

Démonstration ▽

Écrivons $p_\alpha(x) = \exp\left[\alpha\ln(x)\right]$. Les trois limites se déduisent de celles de l'exponentielle, au moyen du changement de variable $y(x) = \alpha\ln(x)$.

- au voisinage de 0^+

$$\left.\begin{array}{r}\text{On pose } y(x) = \alpha\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty \\ \exp(y) \xrightarrow[y\to -\infty]{} 0^+\end{array}\right) \quad \text{Par composition des limites, il vient} \quad \lim_{x\to 0^+} p_\alpha(x) = 0^+$$

- au voisinage de $+\infty$

$$\left.\begin{array}{r}\text{On pose } y(x) = \alpha\ln(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty \\ \exp(y) \xrightarrow[y\to +\infty]{} +\infty\end{array}\right) \quad \text{Par composition des limites, il vient} \quad \lim_{x\to +\infty} p_\alpha(x) = +\infty$$

- au voisinage de a

$$\left.\begin{array}{r}\text{On pose } y(x) = \alpha\ln(x) \xrightarrow[x\to a]{} \alpha\ln(a) \\ \exp(y) \xrightarrow[y\to \alpha\ln(a)]{} \exp(\alpha\ln(a)) = a^\alpha\end{array}\right) \quad \text{Par composition des limites, il vient} \quad \lim_{x\to a} p_\alpha(x) = a^\alpha$$

▲

3.f Fonctions puissances et exponentielles

Proposition 4.16.—

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbf{R}, \exp(x) = e^x}$$

Démonstration ▽

Par définition de la fonction puissance d'exposant x, $e^x = p_x(e) = \exp(x\ln(e))$. Comme $\ln(e) = 1$, il vient

$$\exp(x) = e^x$$

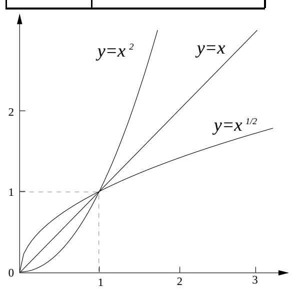
▲

Commentaires : l'exponentielle de x est e puissance x. Cette propriété justifie les **notations habituelles** pour la fonction exponentielle $\begin{array}{rccc}\exp : & \mathbf{R} & \to & \mathbf{R}^{+\star} \\ & x & \mapsto & e^x\end{array}$.

3.g Tableaux de variation et graphes

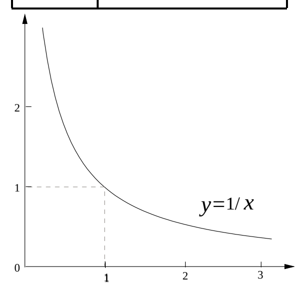
puissances d'exposant positif

x	0	$+\infty$
$p_\alpha(x)$	0^+ $\nearrow$	$+\infty$



puissances d'exposant négatif

x	0	$+\infty$
$p_\alpha(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0^+



4 Croissances comparées des logarithmes, puissances et exponentielles

Comme nous l'avons déjà mentionné, les opérations algébriques sur les limites laissent apparaître des formes indéterminées. Pour lever ces indéterminations, nous aurons besoin de *comparer les vitesses de convergence des fonctions usuelles*. C'est le but des propositions suivantes.

4.a Logarithme VS Puissance

Lemme 4.17.—

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$$

Démonstration ▽

Pour établir cette limite, nous utiliserons un théorème d'existence de limite par comparaison.

$\boxed{1}$ Pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$. Pour établir cette inégalité[3], étudions rapidement la fonction différence $\varphi :\ x \mapsto \ln(x) - x + 1$.

φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$. Ainsi, φ est croissante sur $]0, 1]$ puis décroissante sur $[1, +\infty[$. En particulier, pour tout $x \geq 1$, $\varphi(x) \leq \varphi(1) = 0$.

$\boxed{2}$ Soit $x \geq 1$, d'après le premier point, nous savons que $0 \leq \ln(x) \leq x$.

Ceci étant vrai pour tout réel $x \geq 1$, nous pouvons l'appliquer à $\sqrt{x}$. Il vient

$$0 \leq \frac{1}{2}\ln(x) \leq \sqrt{x}$$

$$0 \leq \frac{1}{x}\ln(x) \quad = \quad \frac{2}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+.$$

D'après le théorème de convergence par encadrement (**Théorème des gendarmes**), il en résulte que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. ▲

On en déduit

Proposition 4.18.— Log Vs Puis —. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R}^{+\star}$. Alors

- **au voisinage de** $+\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0^+$
- **au voisinage de** 0^+, $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0^+$.

En pratique : retenez que *lorsqu'il y a indétermination* **la puissance l'emporte sur le logarithme.**

3. que nous retrouverons souvent !

Démonstration $\triangledown$

- Au voisinage de $+\infty$. Remarquons que $\dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{\ln x^{\beta/\alpha}}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{On pose } y(x) = x^{\beta/\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \\ \dfrac{\ln(y)}{y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0^+ \end{array}\right\} \quad \text{Par composition des limites, il vient} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^{\beta/\alpha}}{x^{\beta/\alpha}} = 0^+.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{On pose } z(x) = \dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{\ln x^{\beta/\alpha}}{x^{\beta/\alpha}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+ \\ z^\alpha \xrightarrow[z\to 0^+]{} 0^+ \end{array}\right\} \quad \text{Par composition des limites, il vient} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0^+$$

- Au voisinage de 0^+. La tactique consiste à se ramener en $+\infty$, en posant $y(x) = \dfrac{1}{x}$. On observe que

$$x^\beta\,|\ln(x)|^\alpha = (1/x)^{-\beta}\,|-\ln(1/x)|^\alpha = \frac{|\ln(1/x)|^\alpha}{(1/x)^\beta} = \frac{(\ln y(x))^\alpha}{y(x)^\beta}$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\left.\begin{array}{l} \text{On pose } y(x) = \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty \\ \frac{(\ln y)^\alpha}{y^\beta} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0^+ \end{array}\right\} \quad \text{Par composition des limites, il vient} \quad \lim_{x\to 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0^+.$$

$\blacktriangle$

4.b Exponentielle VS Puissance

Afin de compléter le «tableau» de comparaison des fonctions usuelles, il reste à comparer les puissances avec les exponentielles. C'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 4.19.— Puis Vs Exp — . Soit $\alpha > 0$, alors :

- **au voisinage de** $+\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0^+$
- **au voisinage de** $-\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x = 0^+$

En pratique : retenez que *lorsqu'il y a indétermination* **l'exponentielle l'emporte sur la puissance**.

Démonstration $\triangledown$

- Au voisinage de $+\infty$. Pour étudier cette limite, nous allons poser $y(x) = e^x$, de sorte que $x = \ln(y(x))$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{On pose } y(x) = e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \\ \frac{(\ln y)^\alpha}{y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0^+ \end{array}\right\} \quad \text{Par composition des limites, il vient} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln y(x))^\alpha}{(y(x))} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0^+.$$

- Au voisinage de $-\infty$: posons $y = -x$, il vient $|x|^\alpha e^x = \dfrac{y(x)^\alpha}{a^{y(x)}}$. On conclut à l'aide du cas précédent :

$$\left.\begin{array}{l} \text{On pose } y(x) = -x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty \\ \frac{y^\alpha}{e^y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0^+ \end{array}\right\} \quad \text{Par composition des limites, il vient} \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x = 0^+.$$

$\blacktriangle$

4.c Mise en œuvre

Pour étudier une limite, il est inutile de détailler le calcul des limites par OPA. En revanche, vous devez expliciter vos changements de variables ainsi que toutes les relations de comparaison que vous utilisez.

Exercice : Etudiez les limites suivantes :

1. $f(x) = 2^x - x^2$ quand x tend vers $+\infty$,
2. $f(x) = \dfrac{2^x - x^2}{\ln x}$ quand x tend vers $+\infty$,
3. $f(x) = x^{1/x}$ quand x tend vers $+\infty$,
4. $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ quand x tend vers 0^+.

III Fonctions hyperboliques

1 Fonctions sinus, cosinus tangente hyperboliques

1.a Définitions

Comme toute fonction définie sur **R**, l'exponentielle se décompose –de façon unique– en une partie paire et une partie impaire, appelées respectivement cosinus et sinus hyperboliques. Plus précisément :

Proposition-Définition 4.20.—
- La fonction **cosinus hyperbolique** est la fonction, notée ch : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, paire définie par

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R}, \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

- La fonction **sinus hyperbolique** est la fonction, notée sh : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, impaire définie par

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R}, \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

- La fonction **tangente hyperbolique** est la fonction, notée th : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ impaire définie par

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.}$$

Remarque : Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, $\begin{array}{lcl} \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x &=& e^x \\ \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x &=& e^{-x} \end{array}$

Conséquence : $1 = \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)$

1.b Propriétés

Théorème 4.21.— Les fonctions ch , sh , th : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sont indéfiniment dérivables sur **R** et

- Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$.
- Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$.
- Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

Démonstration ▽
Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur **R** car $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ le sont. De plus, pour tout réel x,

- $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ donc $\operatorname{ch}'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x)$.
- $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ donc $\operatorname{sh}'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x)$.
- $\operatorname{th}'(x) = \left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)'^{\text{ABUS}} = \dfrac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. ▲

1.c Tableaux de variation et graphes

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{ch}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x)$		$+$	
$\mathrm{sh}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\mathrm{th}'x$		$+$	
$\mathrm{th}\,x$	-1	$\nearrow$	$+1$

Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}'(x) &= \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 \\ \mathrm{sh}(x) &= \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \end{aligned}$$

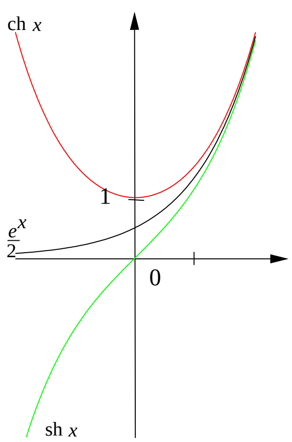
Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}'(x) &= \mathrm{sh}(x) \\ \mathrm{ch}'(x) &\geq 0 \iff x \geq 0 \\ \mathrm{ch}(x) &= \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{th}'(x) &= \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} > 0 \\ \mathrm{th}(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \end{aligned}$$

Graphe des fonctions hyperboliques

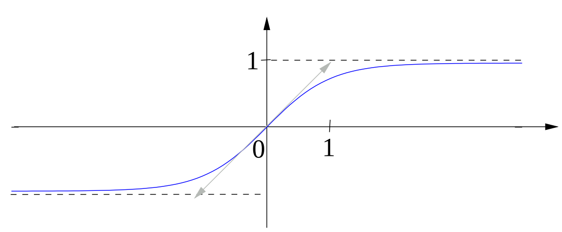


Vous pouvez observer sur la figure ci-contre que les graphes de ch et sh possèdent une *courbe asymptote* commune au voisinage de $+\infty$. En effet, pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{sh}\,x < \frac{e^x}{2} < \mathrm{ch}\,x$ et $\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x = e^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Par conséquent la courbe représentative de $\frac{e^x}{2}$ est asymptote aux graphes de ch et de sh au voisinage de $+\infty$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\mathrm{th}(x) = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$. On en déduit aisément par OPA que

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) = -1$

Comme $\mathrm{th}(0) = 0$ et $\mathrm{th}'(0) = 1$, la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$.



Exercice : Soit $n \in \mathbf{N}$ et $t \in \mathbf{R}^\star$, calculez $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{sh}(kt)$.

Indication : vous pourrez introduire $C = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}\,kt$. ☺

2 Trigonométrie hyperbolique

Ainsi que vous l'avez remarqué, les expressions définissant ch et sh sont analogues aux **formules d'Euler** pour les fonctions cos et sh . Comparez plutôt :

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

L'analogie entre les fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques ne s'arrête pas là, comme le montrent les résultats suivants.

2.a Relation fondamentale de trigonométrie hyperbolique ❤

Théorème 4.22.—

- pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$
- pour tout $x \in \mathbf{R}$, $1 - \operatorname{th}^2(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$

Démonstration ▽
Soit $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) &= (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) = e^x\, e^{-x} = 1. \\
1 - \operatorname{th}^2(x) &= \frac{\operatorname{ch}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} - \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}
\end{aligned}$$

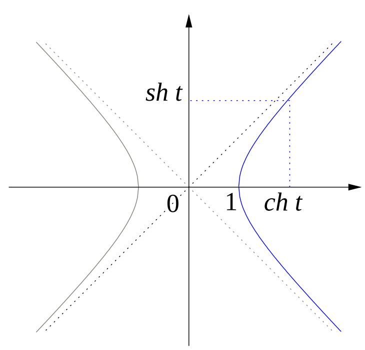
▲

Interprétation géométrique :
Cette formule très importante est analogue à

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

qui montre que pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, le point $M\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix}$ appartient au cercle de centre 0 et de rayon 1. De façon analogue, le point $M\begin{pmatrix}\operatorname{ch} x\\ \operatorname{sh} x\end{pmatrix}$ décrit une branche de l'*hyperbole* équilatère d'équation

$$x^2 - y^2 = 1.$$



Vocabulaire : *d'où le nom de ces fonctions . . .*

2.b Formules d'addition et de duplication

Proposition 4.23.— Formules d'addition et de duplication

- $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$
- $\operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$
- $\operatorname{ch}(2a) = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a$
- $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a$
- $\operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a$
- $\operatorname{sh}(2a) = 2\operatorname{ch} a \operatorname{sh} a$

En pratique : il n'est pas nécessaire d'apprendre ces nouvelles formules de trigonométrie. Vous pouvez les retrouver aisément à partir des formules de trigonométrie circulaire : il suffit de changer le signe à chaque fois qu'apparaît le produit de deux sinus.

Démonstration ▽
Montrons par exemple la formule d'addition pour les ch :

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b &= \frac{e^a + e^{-a}}{2} \times \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2} \times \frac{e^b - e^{-b}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\left[e^{a+b} + e^{a-b} + e^{-a+b} + e^{-a-b} + e^{a+b} - e^{a-b} - e^{-a+b} + e^{-a-b}\right] \\
&= \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \operatorname{ch}(a+b).
\end{aligned}$$

▲

Exercice : Soit $x \in \mathbf{R}$.

1. Exprimez $\operatorname{ch}(3x)$ en fonction de $\operatorname{ch}(x)$.

2. Linéarisez $\operatorname{ch}^3(x)$.

Exercice : Soit $t \in \mathbf{R}^\star$, $n \in \mathbf{N}^\star$. Calculez $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch} \frac{t}{2^k}$.

Exercice : Montrez que pour tout $x \in \mathbf{R}^\star$, $\operatorname{th}(x) = \dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \dfrac{1}{\operatorname{th}(x)}$. Déduisez-en pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, la valeur de la somme $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \operatorname{th}(2^k x)$.

Solution ▽
Soit $x \in \mathbf{R}^\star$

$$\begin{aligned}
\operatorname{th}(x) + \frac{1}{\operatorname{th}(x)} &= \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} + \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} = \frac{\operatorname{sh}^2(x) + \operatorname{ch}^2(x)}{\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)} \\
&= 2\,\frac{\operatorname{ch}(2x)}{\operatorname{sh}(2x)} = 2\operatorname{th}(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}^\star$, on a bien : $\operatorname{th}(x) = \dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \dfrac{1}{\operatorname{th}(x)}$.
Soit $n \in \mathbf{N}$, et $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, l'égalité précédente appliquée à $x_k = 2^k x$ entraîne que

$$2^k \operatorname{th}(x_k) = \frac{2^{k+1}}{\operatorname{th}(x_{k+1})} - \frac{2^k}{\operatorname{th}(x_k)}$$

Sommons membre à membre ces égalités. Un télescopage donne directement :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \operatorname{th}(2^k x) = \frac{2^{n+1}}{\operatorname{th}(2^{n+1}x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)}$$

▲

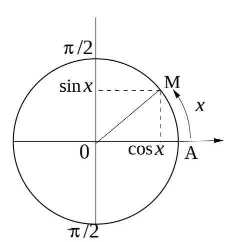
IV Fonctions trigonométriques

1 Les fonctions sinus, cosinus, tangente

1.a Définitions

Soit $x \in \mathbf{R}$. On note $M(x)$ le point du cercle trigonométrique repéré par l'angle x. $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$ sont définis par :

- $\cos(x) = \overline{OH}$
- $\sin(x) = \overline{OK}$
- $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \overline{AT}$



1.b Propriétés

Théorème 4.24.— Propriétés des fonctions sinus, cosinus, tangente —.

- La fonction sin : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est impaire, périodique de période 2π de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$
- La fonction cos : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est paire, périodique de période 2π de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.
- La fonction tan : $\mathcal{D}_{tan} \to \mathbf{R}$ est impaire, périodique de période π. De plus tan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_{tan}$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_{tan}$, $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.

où $\mathcal{D}_{tan} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$

Démonstration ▽
Soit $x \in \mathcal{D}_{tan}$.

$$\begin{aligned}
\tan'(x) &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \text{ABUS} = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)
\end{aligned}$$

▲

Remarque : D'après les propriétés de symétries de la fonction sinus, vous pouvez remarquer que $\sin'(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ et $\cos'(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$. On en déduit par récurrence que sin et cos sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $x \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{N}$, on a :

$$\sin^{(k)}(x) = \sin(x + k\frac{\pi}{2}) \quad \cos^{(k)}(x) = \cos(x + k\frac{\pi}{2})$$

1.c Tableaux de variation et graphes

• Étude de la fonction sinus

$\boxed{1}$ **Réduction de l'intervalle d'étude**

sin est 2π-périodique, impaire.

▷ étude sur $[0, \pi]$ puis symétrie par rapport à O

$\sin(\pi - t) = \sin(t)$,

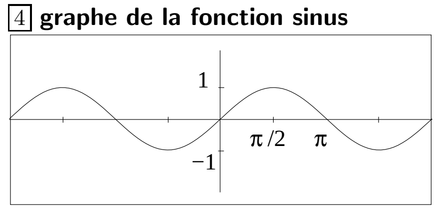
▷ étude sur $[0\pi/2]$ puis symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{2}$ **Étude des variations**
Soit $x \in [0, \pi/2]$. $\sin'(x) = \cos(x) \geq 0$.

$\boxed{3}$ **Tableau de variation**

x	0	$\pi/2$
$\sin'(x)$	1	$+$
$\sin(x)$	0 ↗	1

$\boxed{4}$ **graphe de la fonction sinus**



• Étude de la fonction cosinus

$\boxed{1}$ **Réduction de l'intervalle d'étude**

cos est 2π-périodique, paire.

▷ étude sur $[0, \pi]$ puis symétrie par rapport à (Oy)

$\cos(\pi - t) = -\cos(t)$,

▷ étude sur $[0\pi/2]$ puis symétrie par rapport à $A\binom{\pi/2}{0}$.

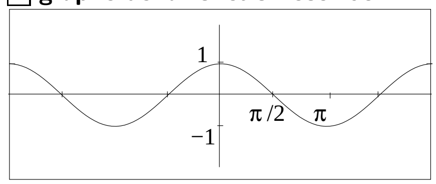
$\boxed{2}$ **Étude des variations**

Soit $x \in [0, \pi/2]$. $\cos'(x) = -\sin(x) \leq 0$.

$\boxed{3}$ **Tableau de variations**

x	$0 \qquad \pi/2$
$\cos'(x)$	$0 \quad - \quad -1$
$\cos(x)$	$1 \searrow 0$

$\boxed{4}$ **graphe de la fonction cosinus**



• Étude de la fonction tangente

$\boxed{1}$ **Réduction de l'intervalle d'étude**

tan est π-périodique, impaire.

▷ étude sur $[0, \pi/2[$ puis symétrie par rapport à O

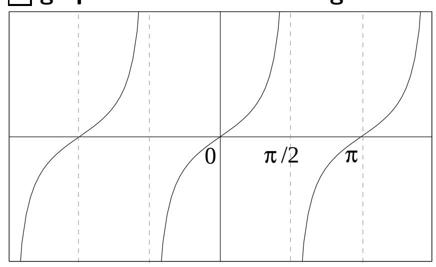
$\boxed{2}$ **Étude des variations**

Soit $x \in [0, \pi/2[$. $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$.

$\boxed{3}$ **Tableau de variation**

x	$0 \qquad \pi/2$
$\tan'(x)$	$1 \quad +$
$\tan(x)$	$0 \nearrow +\infty$

$\boxed{4}$ **graphe de la fonction tangente**

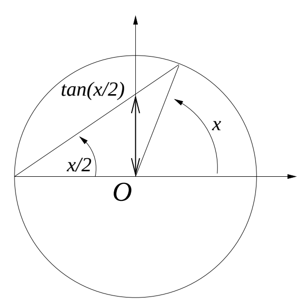


2 Paramétrisation rationnelle de $\mathcal{U} \setminus \{A'\}$

Le cercle unité $\mathcal{U}$ est naturellement paramétré par l'angle x :

$$\mathcal{U} = \{(\cos(x), \sin(x))\ ;\ x \in \mathbf{R}\}$$

Lorsqu'on retire le point $A'(-1, 0)$, il existe une autre paramétrisation.
Soit $x \in \mathbf{R}$, on note $M(x)$ le point du cercle trigonométrique repéré par l'angle x.
La droite $\Delta = (A'M)$ coupe l'axe des ordonnées à la hauteur t. On a $t = \tan(x/2)$ (voir la figure).
Réciproquement, à chaque ordonnée réelle t, la droite passant par A' et d'ordonnée à l'origine t coupe le cercle unité en un point unique, dont les coordonnées sont des fractions rationnelles de t.



Proposition 4.25.— Soit $x \in \mathbf{R}$, $x \not\equiv \pi\ [2\pi]$. On pose $t = \tan \dfrac{x}{2}$. Alors

$$\blacksquare\ \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \blacksquare\ \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \blacksquare\ \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

La dernière formule n'est valide que pour $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

En pratique : ces formules seront particulièrement utiles pour le calcul d'intégrales par changement de variables (cf *so called* **Règles de Bioche**).

Démonstration $\triangledown$
Soit $x \in \mathbf{R}$, $x \not\equiv \pi\ [2\pi]$. Posons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On a alors

- $\cos^2(x/2) = \dfrac{1}{1+\tan^2(x/2)} = \dfrac{1}{1+t^2}$
- $\cos(x) = 2\cos^2(x/2) - 1 = \dfrac{2}{1+t^2} - 1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\sin(x) = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = 2\cos^2(x/2)\tan(x/2) = \dfrac{2t}{1+t^2}$.
- si de plus $x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, alors $\tan(x) = \tan 2(x/2) = \dfrac{2\tan(x/2)}{1-\tan^2(x/2)} = \dfrac{2t}{1-t^2}$, ▲

3 Équations trigonométriques ❤

Les fonctions trigonométriques, $\sin, \cos, \tan$, ne sont pas injectives, au contraire, grâce à leurs propriétés de symétries, les équations $\sin x = \sin a$, $\cos x = \cos a$, $\tan x = \tan a$ ont beaucoup de solutions.

3.a Résolution de $\cos(x) = \cos(a)$

Soit $a \in \mathbf{R}$ fixé. On s'intéresse à résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation

$$\cos(x) = \cos(a)$$

Sur le graphe de la fonction cos on observe que cette équation possède ~~une~~ deux infinités de solutions. En effet, comme cos est 2π-périodique et paire, on a pour tout entier relatif $k \in \mathbf{Z}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \cos(a+2k\pi) & = & \cos(a) \\ \cos(-a+2k\pi) & = & \cos(a) \end{array}\right.$$

Retenez

Proposition 4.26.— Soit $(a,x) \in \mathbf{R}^2$, alors $\quad \cos(x) = \cos(a) \iff \left\{\begin{array}{l} x \equiv a[2\pi] \\ x \equiv -a[2\pi] \end{array}\right.$.

3.b Résolution de $\sin(x) = \sin(a)$

À cause des symétries de sin, pour tout $a \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{Z}$, on a $\left\{\begin{array}{rcl} \sin(a+2k\pi) & = & \sin(a) \\ \sin(\pi-a+2k\pi) & = & \sin(a) \end{array}\right.$. Par conséquent

Proposition 4.27.— Soit $(a,x) \in \mathbf{R}^2$, alors $\quad \sin(x) = \sin(a) \iff \left\{\begin{array}{l} x \equiv a[2\pi] \\ x \equiv \pi - a[2\pi] \end{array}\right.$.

Remarque : à l'aide des deux dernières propositions, on obtient que $\left\{\begin{array}{l} \cos(x) = \cos(a) \\ \sin(x) = \sin(a) \end{array}\right. \iff x \equiv a\ [2\pi]$

3.c Résolution de $\tan(x) = \tan(a)$

La fonction tan est π-périodique, donc pour tout $a \in \mathbf{R}$ et pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $\tan(a+k\pi) = \tan(a)$. Plus précisément,

Proposition 4.28.— Soit $(a,x) \in \mathbf{R}^2$, alors $\quad \tan(x) = \tan(a) \iff x \equiv a[\pi]$.

Exercice : Résolvez les équations suivantes, et représentez les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\cos x = \sin 3x$.

2. $2\cos^2 x + \sin x = 1$

3.d Résolution de $a\cos(x)+b\sin(x)=c$

Soit $(a,b,c)\in\mathbf{R}^3$ tel que $(a,b)\neq(0,0)$. On résout l'équation

$$a\cos(x)+b\sin(x)=c$$

Dans ce cas, on pose $\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\beta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\gamma=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ de sorte que :

$$(1)\quad\Longleftrightarrow\quad a\cos(x)+b\sin(x)=c\iff\alpha\cos(x)+\beta\sin(x)=\gamma$$

Comme $\alpha^2+\beta^2=1$, il existe $\theta\in\mathbf{R}$ tel que $\begin{cases}\cos(\theta)&=&\alpha\\ \sin(\theta)&=&\beta\end{cases}$.

Par conséquent,

$$(1)\quad\Longleftrightarrow\quad\cos(x-\theta)=\gamma$$

On s'est donc ramenés à la résolution d'un équation de type **3.a**.

Exercice : Résolvez les équations suivantes, et représentez les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\cos x+\sin x=1$
2. $\sqrt{3}\cos 2x-2\sin x\cos x=1$.

4 Règles de calcul pour les fonctions trigonométriques

Elles ont déjà été énoncées dans le **Chapitre 2**. Vous les retrouverez à la fin de ce chapitre, dans un formulaire de trigonométrie.

V Fonctions trigonométriques réciproques

1 La fonction Arc sinus

1.a Définition

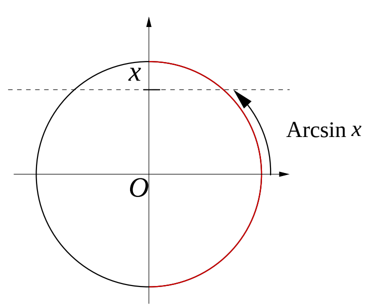
Comme nous venons de le voir dans le paragraphe précédent, pour tout réel $x\in[-1;1]$, l'équation

$$\sin(t)=x$$

admet une infinité de solutions. Autrement dit, x admet ~~une~~ deux infinités d'antécédents par la fonction sin. Parmi tous ces antécédents, un seul appartient à l'intervalle $[-\pi/2;\pi/2]$. Cet unique antécédent est noté $\mathrm{Arcsin}\,(x)$.

Illustration :

$\mathrm{Arcsin}\,(x)$ est l'unique antécédent de x par la fonction sinus compris entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$.



Plus précisément :

Théorème-Définition 4.29.— La fonction restreinte $\sin_{|}:[-\pi/2;\pi/2]\to[-1;1]$ est une bijection strictement croissante et continue. Son application réciproque $\mathrm{Arcsin}:[-1;1]\to[-\pi/2;\pi/2]$ vérifie, pour tout couple (x,t) de réels

$$\boxed{\begin{cases}x\in[-1,1]\\ t=\mathrm{Arcsin}\,(x)\end{cases}\iff\begin{cases}t\in[-\pi/2;\pi/2]\\ x=\sin(t)\end{cases}}$$

Démonstration ▽
D'après l'étude de la fonction sinus, on sait que $\sin_{|}: [-\pi/2;\pi/2] \to [-1;1]$ est strictement croissante et continue. On applique alors le **théorème de la bijection**. ▲

Commentaires : pour $x \in [-1,1]$, $\operatorname{Arcsin}(x)$ est l'unique angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus vaut x.

En pratique : pour démontrer que $\operatorname{Arcsin}(x) = t$

- vous *vérifiez* que $\sin(t) = x$, par le calcul
- vous *localisez* t : il s'agit de prouver que $t \in [-\pi/2;\pi/2]$ à l'aide d'inégalités.

Exemple : $\operatorname{Arcsin}(\sin(18\pi/5)) = -2\pi/5$

1.b Tableau de valeurs

En utilisant la définition de Arcsin, on obtient

x	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\operatorname{Arcsin} x$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$

1.c Premières propriétés

Proposition 4.30.—

- Pour tout $t \in [-\pi/2;\pi/2]$, $\operatorname{Arcsin}(\sin t) = t$
- Pour tout $x \in [-1,1]$, $\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$
- Pour tout $x \in [-1,1]$,$\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$
- Pour tout $x \in]-1,1[$,$\tan(\operatorname{Arcsin} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Démonstration ▽

- Soit $t \in [-\pi/2;\pi/2]$, on pose $x = \sin(t)$. Alors $x \in [-1,1]$ et $t = \operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arcsin}\big(\sin(t)\big)$
- Soit $x \in [-1,1]$, posons $t = \operatorname{Arcsin}(x)$ de sorte que $t \in [-\pi/2,\pi/2]$ et $x = \sin(t) = \sin\big(\operatorname{Arcsin}(x)\big)$.
- Soit $x \in [-1,1]$, posons $t = \operatorname{Arcsin}(x)$ de sorte que $t \in [-\pi/2,\pi/2]$ et $x = \sin(t)$.

  Comme la fonction cos est positive sur cet intervalle, nous pouvons écrire que

  $$\cos(t) = \sqrt{\cos^2(t)} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{1-x^2}$$

- Soit $x \in]-1,1[$, posons $t = \operatorname{Arcsin}(x)$ de sorte que $t \in]-\pi/2,\pi/2[$ et $x = \sin(t) \neq 0$. Alors $\tan(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. ▲

En pratique : la relation $\operatorname{Arcsin}(\sin t) = t$ n'est valide que si $t \in [-\pi/2,\pi/2]$. En dehors de cette intervalle, il faut utiliser les formules de trigonométrie pour se ramener dans cet intervalle.

Exercice : Calculez $\operatorname{Arcsin}(\sin 8\pi/3)$.

Solution ▽
Posons $t = \operatorname{Arcsin}(\sin 8\pi/3)$. *Par définition de* Arcsin, t *est l'unique antécédent de* $\sin 8\pi/3$ *appartenant à l'intervalle* $[-\pi/2,\pi/2]$.
En utilisant la périodicité de sin *et ses symétries, j'obtiens* $\sin(8\pi/3) = \sin 2\pi/3 = \sin \pi/3$. *Par conséquent*

$$\operatorname{Arcsin}(\sin 8\pi/3) = \operatorname{Arcsin}(\sin \pi/3) = \pi/3$$

▲

1.d Propriétés fondamentales de Arcsin

Théorème 4.31.— La fonction $\operatorname{Arcsin} : [-1,1] \to [-\pi/2;\pi/2]$ est strictement croissante et impaire. Elle est continue sur $[-1,1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. De plus,

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Remarque : La fonction Arcsin n'est pas dérivable aux bornes de son intervalle de définition : le graphe présente des demi-tangentes verticales en ces points.

Démonstration ▽
La continuité et la stricte monotonie de Arcsin découlent directement du **théorème de la bijection**. En ce qui concerne, sa dérivabilité, elle résulte de la **Proposition 4.17**.
En effet, la fonction $\sin_|$ est dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$. De plus sa dérivée (cos) ne s'annule pas sur cet intervalle. D'après la **Proposition 4.17**, Arcsin est donc dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée

$$\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sin'(\operatorname{Arcsin} x)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)}.$$

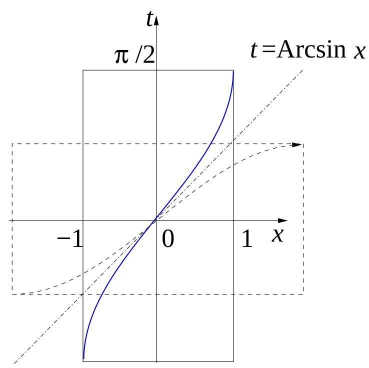
D'après la proposition précédente, il en résulte que

$$\text{pour tout } x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

▲

1.e Tableau de variation et graphe de Arcsin

x	-1		0		1
$\operatorname{Arcsin}'(x)$	‖	$+$	1	$+$	‖
$\operatorname{Arcsin}(x)$	$-\pi/2$	↗	0	↗	$\pi/2$



Les fonctions Arcsin et $\sin_|$ étant réciproques l'une de l'autre, leurs graphes sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Exercice : Étudiez et représentez la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ t & \mapsto & \operatorname{Arcsin}(\sin t) \end{array}$.

Exercice : Résolvez l'équation

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin} 2x = \pi/2.$$

2 La fonction Arc cosinus

2.a Définition

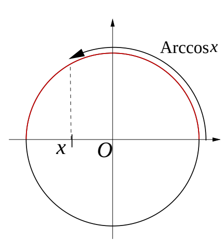
Soit $x \in [-1;1]$, l'équation

$$\cos(t) = x$$

admet deux infinités de solutions. Autrement dit, x admet une infinité (deux en fait !) d'antécédents par la fonction cos. Parmi tous ces antécédents, x admet un unique antécédent par cos compris entre 0 et π. Cet unique antécédent est noté $\operatorname{Arccos}(x)$.

Illustration :

$\operatorname{Arccos}(x)$ est l'unique angle compris entre 0 et π dont le cosinus vaut x.



Plus précisément :

Théorème-Définition 4.32.— La fonction restreinte $\cos_| : [0;\pi] \to [-1;1]$ est une bijection strictement décroissante et continue. Son application réciproque est la fonction Arccos : $[-1;1] \to [0;\pi]$. Elle vérifie pour tout couple (x,t) de réels

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x \in [-1,1] \\ t = \operatorname{Arccos}(x) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t \in [0,\pi] \\ x = \cos(t) \end{array}\right.}$$

Commentaires : si $x \in [-1,1]$, $\operatorname{Arccos} x$ est l'unique antécédent de x par la fonctio cosinus compris entre 0 et π.

En pratique : pour démontrer que $\operatorname{Arccos} x = t$

- vous *vérifiez* que $\cos(t) = x$,
- vous *localisez* t : il s'agit de prouver que $t \in [0;\pi]$.

2.b Tableau de valeurs

x	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\operatorname{Arccos} x$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0

2.c Propriétés premières

Proposition 4.33.—

- Pour tout $t \in [-0,\pi]$, $\operatorname{Arccos}(\cos t) = t$
- Pour tout $x \in [-1,1]$, $\cos(\operatorname{Arccos} x) = x$
- Pour tout $x \in [-1,1]$, $\sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}$
- Pour tout $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$,$\tan(\operatorname{Arccos} x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

Démonstration ▽

- Soit $t \in [0,\pi]$, on pose $x = \cos(t)$. Alors $x \in [-1,1]$ et $t = \operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arccos}\big(\cos(t)\big)$.
- Soit $x \in [-1,1]$, posons $t = \operatorname{Arccos}(x)$ de sorte que $t \in [0,\pi]$ et $x = \cos(t) = \cos\big(\operatorname{Arccos}(x)\big)$.
- Soit $x \in [-1,1]$, posons $t = \operatorname{Arcsin}(x)$ de sorte que $t \in [0,\pi]$ et $x = \cos(t)$.

  Comme la fonction sin est positive sur l'intervalle $[0,\pi]$, nous pouvons écrire que
  $$\sin(t) = \sqrt{\sin^2(t)} = \sqrt{1-\cos^2(t)} = \sqrt{1-x^2}$$
- Soit $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$, posons $t = \operatorname{Arccos}(x)$ de sorte que $t \in [0\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ et $x = \cos(t) \neq 0$. Alors $\tan(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. ▲

En pratique : la relation $\operatorname{Arccos}(\cos t) = t$ n'est valide que si $t \in [0,\pi]$. En dehors de cette intervalle, il faut utiliser les formules de trigonométrie pour se ramener dans cet intervalle.

Exercice : Calculez $\operatorname{Arccos}(\cos 5\pi/4)$.

Solution ▽
Puis les symétries de la fonction cos *montrent :*

$$\operatorname{Arccos}(\cos 5\pi/4) = \operatorname{Arccos}(\cos(2\pi - 5\pi/4) = \operatorname{Arccos}(\cos(3\pi/4)).$$

Comme de plus $3\pi/4 \in [0,\pi]$, *il vient finalement* $\operatorname{Arccos}(\cos(3\pi/4)) = 3\pi/4$.
Un petit dessin aide bien quand même ... ▲

2.d Propriétés fondamentales

Théorème 4.34.— La fonction Arccos : $[-1,1] \to [0;\pi]$ est strictement décroissante. Elle est continue sur $[-1,1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. De plus

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Démonstration ▽

La continuité et la stricte monotonie de Arccos découlent directement du **théorème de la bijection**. En ce qui concerne, sa dérivabilité, elle résulte de la **Proposition** 3.17.

En effet, la fonction $\cos_|$ est dérivable sur $]0,\pi[$. De plus sa dérivée (sin) ne s'annule pas sur cet intervalle. D'après la **Proposition** 3.17, Arccos est donc dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée

$$\operatorname{Arccos}'(x) = \frac{1}{\cos'(\operatorname{Arccos} x)} = -\frac{1}{\sin(\operatorname{Arccos} x)}.$$

D'après la proposition précédente, il en résulte que

$$\text{pour tout } x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

▲

Vous avez pu constater que les dérivées de Arccos et de Arcsin sur $]-1,1[$ sont opposées : pour tout $x \in]-1,1[$, $\operatorname{Arcsin}'(x) + \operatorname{Arccos}'(x) = 0$. Par conséquent, la fonction Arcsin + Arccos est constante sur cet intervalle. Plus précisément, nous avons la relation :

Corollaire 4.35.—

$$\boxed{\text{pour tout } x \in [-1,1], \quad \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}}$$

Démonstration ▽

La remarque précédente permet de démontrer cette égalité par dérivation. J'adopte ici un autre point de vue.

Soit $x \in [-1,1]$. Posons $t = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos} x$.

- comme $\operatorname{Arccos} x \in [0,\pi]$, il est clair que $t \in [-\pi/2, \pi/2]$.
- $\sin t = \cos(\operatorname{Arccos} x) = x$.

Ainsi, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $\sin t = x$: en clair, $t = \operatorname{Arcsin} x$. ▲

Exercice : Résolvez l'équation $\operatorname{Arcsin} x - \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{6}$.

Solution ▽

Soit $x \in [-1,1]$, en utilisant la relation précédente, il vient :

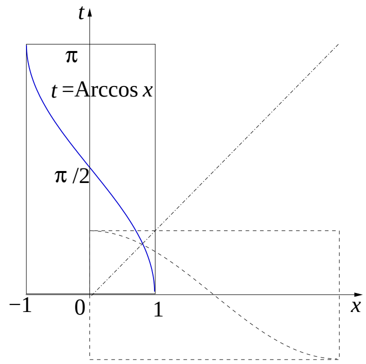
$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} x - \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{6} &\iff \operatorname{Arcsin} x - \frac{\pi}{2} + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{6} \\ &\iff 2\operatorname{Arcsin} x = \frac{2\pi}{3} \\ &\iff \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{3} \\ &\iff x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

▲

Exercice : Simplifiez l'expression $\operatorname{Arccos}(2x^2 - 1)$.

2.e Tableau de variation et graphe de Arccos

x	-1		0		1
$\mathrm{Arccos}'(x)$	$\Vert$	$-$	-1	$-$	$\Vert$
$\mathrm{Arccos}\,(x)$	π	$\searrow$	$\pi/2$	$\searrow$	0



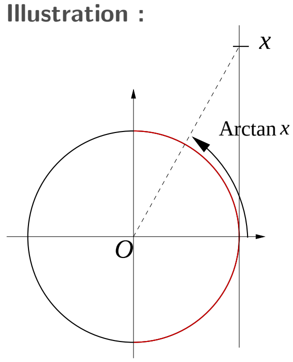
Ces fonctions étant réciproques l'une de l'autre, les graphes de Arccos et de $\cos_|$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

3 La fonction Arc tangente

3.a Définition

Soit $x \in \mathbf{R}$, l'équation $\tan(t) = x$ admet une infinité de solutions. Autrement dit x admet une infinité d'antécédents par la fonction tan, deux d'entre eux différant d'un multiple entier de π. Toutefois, parmi tous ces antécédents, un seul appartient à l'intervalle $]-\pi/2;\pi/2[$. Cet unique antécédent est noté $\mathrm{Arctan}\,(x)$.

Illustration :



Plus précisément :

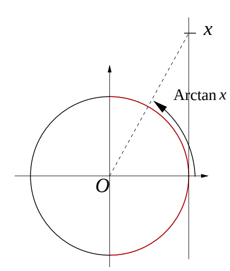
Théorème-Définition 4.36.— La fonction restreinte $\tan_| :]-\pi/2;\pi/2[\to \mathbf{R}$ est une bijection strictement croissante et continue. Son application réciproque est la fonction $\mathrm{Arctan} : \mathbf{R} \to]-\pi/2;\pi/2[$. Elle vérifie pour tout couple (x,t) de réels

$$\boxed{\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ t = \mathrm{Arctan}\,(x) \end{cases} \iff \begin{cases} t \in]-\pi/2,\pi/2[\\ x = \tan(t) \end{cases}}$$

Commentaires : soit $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Arctan}\,x$ est l'unique antécédent de x par la fonction tan appartenant à l'intervalle $]-\pi/2;\pi/2[$.

En pratique : pour démontrer que $\mathrm{Arctan}\,x = t$

- vous *vérifiez* que $\tan(t) = x$,
- vous *localisez* t : il s'agit de prouver que $t \in]-\pi/2;\pi/2[$.



3.b Tableau de valeurs

x	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{Arctan}\,x$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$

3.c Propriétés premières

Proposition 4.37.—

- Pour tout $t \in]-\pi/2;\pi/2[$, $\operatorname{Arctan}(\tan t) = t$
- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$
- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos(\operatorname{Arctan} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin(\operatorname{Arctan} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Démonstration $\triangledown$

- Soit $t \in]-\pi/2;\pi/2[$, on pose $x = \tan(t)$. Alors $x \in \mathbf{R}$ et $t = \operatorname{Arctan}(x) = \operatorname{Arctan}\big(\tan(t)\big)$
- Soit $x \in \mathbf{R}$, posons $t = \operatorname{Arctan}(x)$ de sorte que $t \in]-\pi/2;\pi/2[$ et $x = \tan(t) = \tan\big(\operatorname{Arctan}(x)\big)$.
- Soit $x \in \mathbf{R}$, posons $t = \operatorname{Arctan}(x)$ de sorte que $t \in]-\pi/2;\pi/2[$ et $x = \tan(t)$.

  Comme la fonction cos est strictement positive sur l'intervalle, nous pouvons écrire que
  $$\cos(t) = \sqrt{\cos^2(t)} = \frac{1}{1+\tan^2(t)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
- Soit $x \in \mathbf{R}$, posons $t = \operatorname{Arctan}(x)$ de sorte que $t \in]-\pi/2,\pi/2[$ et $x = \tan(t)$. Alors $\sin(t) = \cos(t) \times \tan(t) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. ▲

En pratique : la relation $\operatorname{Arctan}(\tan t) = t$ n'est valide que si $t \in]-\pi/2,\pi/2[$. En dehors de cette intervalle, il faut utiliser les formules de trigonométrie pour se ramener dans cet intervalle.

Exercice : Calculez $\operatorname{Arctan}(\tan 2\pi/3)$.

3.d Propriétés fondamentales

Théorème 4.38.— La fonction $\operatorname{Arctan} : \mathbf{R} \to]-\pi/2;\pi/2[$ est strictement croissante et impaire. Elle est continue et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. De plus

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R}, \quad \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Remarque : Comme Arctan réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]-\pi/2,\pi/2[$, il s'ensuit que

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{Arctan} x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration $\triangledown$

Comme la fonction restreinte $\tan_| :]-\pi/2,\pi/2[\to \mathbf{R}$ est bijective, continue et strictement croissante, le **théorème de la bijection** prouve qu'il en est de même pour Arctan. De plus, $\tan_|$ est impaire et par suite Arctan l'est aussi.
D'autre part, la fonction $\tan_|$ est dérivable sur $]-\pi/2,\pi/2[$ et sa dérivée ne s'annule pas. Par conséquent, son application réciproque est dérivable, et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\quad \operatorname{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{\tan'(\operatorname{Arctan} x)} = \dfrac{1}{1+\tan^2(\operatorname{Arctan} x)} = \dfrac{1}{1+x^2}$. ▲

Proposition 4.39.—

$$\boxed{\begin{array}{l} \blacksquare \ \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^{+\star}, \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} \\ \blacksquare \ \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^{-\star}, \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2} \end{array}}$$

Démonstration $\triangledown$

Soit $f : \mathbf{R}^\star \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$\text{pour tout } x \in \mathbf{R}^\star,\ f(x) = \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(1/x)$$

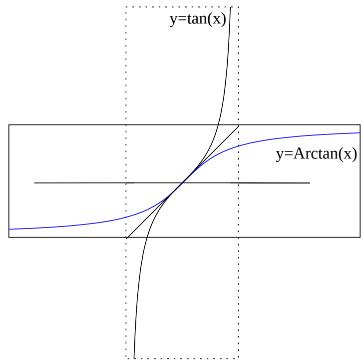
La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$ (comme somme de telles fonctions) et pour tout réel $x \in \mathbf{R}^\star$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(1/x)^2} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Comme sa dérivée est nulle sur chacun des intervalles $\mathbf{R}^{-\star}$ et $\mathbf{R}^{+\star}$, f est constante sur chacun de ces intervalles. Pour calculer cette contante, évaluons f en 1 et -1 :
il vient $f(1) = \operatorname{Arctan}(1) + \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ et $f(-1) = 2\operatorname{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{2}$. ▲

3.e Tableau de variation et graphe

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{Arctan}'(x)$	$+$	1	$+$
$\operatorname{Arctan}(x)$	$-\pi/2$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $\pi/2$



Les graphes des fonctions $\tan_{|}$ et de Arctan sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Exercice : Calculez $t = \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3}$.

Solution ▽
Posons $t = \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3}$. *Comme* t *est somme de deux arc tangentes, on peut raisonnablement espérer que* t *soit aussi une arc tangente.*

- *Calculons* $\tan t$. *Par la formule d'addition pour les tangentes, il vient :*

$$\tan t = \frac{\tan(\operatorname{Arctan}(1/2)) + \tan(\operatorname{Arctan}(1/3))}{1 - \tan(\operatorname{Arctan}(1/2)) \times \tan(\operatorname{Arctan}(1/3))} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = \frac{(5/6)}{(5/6)} = 1$$

  Bilan : $\tan t = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$, *mais nous ne pouvons pas en déduire pour autant que* $t = \frac{\pi}{4}$. *Il faut encore prouver que* t *appartient à* $]-\pi/2, \pi/2[$.

- *Pour vérifier que* $t \in]-\pi/2, \pi/2[$, *utilisons la croissance de* Arctan. *Comme* $0 < \frac{1}{2} < 1$ *et* $0 < \frac{1}{3} < 1$, *nous en déduisons que* $0 < \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$ *et* $0 < \operatorname{Arctan}\frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$. *En sommant terme à terme ces encadrements, il en résulte que* $t \in]0, \pi/2[$.

  Conclusion : $t = \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3}$ *appartient à* $]0, \pi/2[$ *et vérifie* $\tan t = \tan\pi/4$. *Comme* tan *est injective sur* $]0, \pi/2[$, *il s'ensuit que* $t = \pi/4$. ▲

VI COMPLÉMENT : note historique sur le logarithme