PROGRAMME DE COLLE S23

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

ESPACES VECTORIELS

Espaces vectoriels

Définition : *On appelle* ***espace vectoriel*** *sur* $\mathbf{K}$ *un ensemble E muni d'une addition interne, notée $+$ et d'une multiplication externe notée $\cdot$ telles que :*

- **L'addition** $+ : E \times E \to E$ *vérifie les propriétés suivantes :*
  - **A1.—** ***associativité*** : $\forall(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \in E^3,\ (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} = \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$.
  - **A2.—** ***commutativité*** : $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ \vec{x}+\vec{y} = \vec{y}+\vec{x}$.
  - **A3.—** *E possède un* ***élément neutre*** *pour $+$, noté* $\vec{0}_E$: $\forall\vec{x} \in E,\ \vec{x}+\vec{0}_E = \vec{0}_E+\vec{x} = \vec{x}$.
  - **A4.—** *tout élément $\vec{x}$ de E possède un* ***opposé****, noté $-\vec{x}$ qui vérifie* $\vec{x}+(-\vec{x}) = \vec{0}_E$
- **La multiplication** $\cdot : \mathbf{K} \times E \to E$ *vérifie les propriétés suivantes :*
  - **M1.—** ***associativité mixte*** : $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2,\ \forall\vec{x} \in E,\ \lambda\cdot(\mu\cdot\vec{x}) = (\lambda.\mu)\cdot\vec{x}$
  - **M2.—** ***distributivité à droite*** : $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2,\ \forall\vec{x} \in E,\ (\lambda+\mu)\cdot\vec{x} = \lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{x}$
  - **M3.—** ***distributivité à gauche*** : $\forall\lambda \in \mathbf{K},\ \forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ \lambda\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}$
  - **M4.—** ***action de*** $1\cdot$: $\forall\vec{x} \in E,\ 1\cdot\vec{x} = \vec{x}$.

Proposition.— Règles de calculs dans un espace vectoriel —. Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-e.v. Pour tous couples $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$ et $(\vec{x},\vec{y}) \in E^2$:

1.	$\lambda\cdot\vec{0}_E = \vec{0}_E$ et $0\cdot\vec{x} = \vec{0}_E$.	**3.**	$\lambda\cdot\vec{x} = \vec{0}_E \iff \big(\lambda = 0 \text{ ou } \vec{x} = \vec{0}_E\big)$.
2.	$(-\lambda)\cdot\vec{x} = -(\lambda\cdot\vec{x}) = \lambda\cdot(-\vec{x})$.	**4.**	$\lambda\cdot(\vec{x}-\vec{y}) = \lambda\cdot\vec{x}-\lambda\cdot\vec{y}$.

Connaître parfaitement : les structures algébriques des exemples classiques d'espaces vectoriels : $\mathbf{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $\mathbf{K}[X]$, $\mathscr{F}(I,\mathbf{K})$, $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Proposition*.— Constructions d'espaces vectoriels

- Soit F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. L'ensemble $\mathscr{F}(X,F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$.
- Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Le produit $E \times F$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$.

Sous-espaces vectoriels

Définition : *Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$ une partie* ***non vide*** *de E. On dit que F est un* ***sous-espace vectoriel de*** *E (s.e.v.) si, F est stable pour les lois $+$ et $\cdot$ de E et muni de ces lois, $(F,+,\cdot)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*

Théorème.— Caractérisation des sous-espaces vectoriels —. Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-e.v. et $F \subset E$ une partie de E.

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \textit{ ssi } \begin{cases} \bullet \quad F \text{ est non vide} \\ \bullet \quad \forall(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2,\ \forall(\vec{x},\vec{y}) \in F^2, \quad \lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{y} \in F \end{cases}$$

Connaître : les sous-espaces vectoriels classiques de $\mathbf{K}^n$ (solution d'un $(SEL)_o$, de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (matrices sym et antisym), de $\mathbf{K}[X]$ ($\mathbf{K}_n[X]$), de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ (suites RL2), de $\mathscr{F}(I,\mathbf{R})$ ($\mathcal{C}^k(I,\mathbf{R})$, $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbf{R})$), *etc ...*

Proposition.— Intersection de sous-espaces vectoriels —. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-ev E. Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition : Somme de deux sous-espaces vectoriels —. *Soit F_1, F_2 deux sev d'un $\mathbf{K}$-ev E. On appelle* ***somme de*** *F_1* ***et de*** *F_2, et note F_1+F_2, le sous-espace vectoriel de E défini par :*

$$F_1+F_2 = \{\vec{x}_1+\vec{x}_2\,;\ \vec{x}_1 \in F_1, \vec{x}_2 \in F_2\} = \{\vec{x} \in E \mid \exists\vec{x}_1 \in F_1,\ \exists\vec{x}_2 \in F_2\ :\ \vec{x} = \vec{x}_1+\vec{x}_2\}$$

De plus, on dit que F_1 et F_2 sont en ***somme directe*** *si tout vecteur $\vec{x} \in E$ s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2. On note alors $F_1 \oplus F_2$ cette somme.*

Remarque : Deux sev F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}_E\}$.

Généralisation : somme et somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de E.

Définition : Sous-espaces supplémentaires —. *Deux sev de E, F_1 et F_2, sont dits **supplémentaires** si $E = F_1 \oplus F_2$. Autrement dit*

$$\boxed{F_1 \text{ et } F_2 \text{ sont supplémentaires, si pour tout } \vec{x} \in E, \text{ il existe } (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E^2, \text{ unique tel que } \left\| \begin{array}{l} \bullet\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \\ \bullet\ \vec{x}_1 \in F_1 \\ \bullet\ \vec{x}_2 \in F_2 \end{array} \right.}$$

Savoir-faire : montrer que deux sev sont supplémentaires par **analyse-synthèse**.

Théorème.— Caractérisation des sous-espaces vectoriels supplémentaires —. Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de $(E, +, \cdot)$. Alors

$$\boxed{E = F_1 \oplus F_2 \iff \begin{array}{l} \bullet\ E = F_1 + F_2 \\ \bullet\ F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}_E\} \end{array}}$$

Définition : Sous-espace vectoriel engendré par une partie —. *Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$-e.v. et $A \subset E$ une partie de E. On appelle **sous-espace vectoriel de E engendré** par A, et on note $\mathsf{Vect}\,(A)$ le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A :*

$$\mathsf{Vect}\,(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ A \subset F}} F$$

Proposition.— Caractérisation du sev engendré par une partie —. Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$- ev, A une partie de E. Alors

$\mathsf{Vect}\,(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de A

En particulier, si $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est une famille finie de vecteurs de E, alors $\mathsf{Vect}\,(\mathscr{F})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des $\vec{u}_i$.

$$\boxed{\mathsf{Vect}\,(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{u}_i \ ; \ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, \right\}}$$

▪▪▪ Familles de vecteurs

Définition : *Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$-e.v et $\mathscr{F} = (\vec{u}_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille de vecteurs de E. On dit que*

- *$\mathscr{F}$ est une **famille génératrice** de E si tout vecteur de E s'écrit comme C-L de vecteurs de $\mathscr{F}$, i.e. $E = \mathsf{Vect}_{\mathbf{K}}(\mathscr{F})$. En particulier, si $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \in E^n$, alors $\mathscr{F}$ est génératrice de E si*

$$\forall \vec{x} \in E,\ \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n,\ \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{u}_i$$

- *$\mathscr{F}$ est une **famille libre** si la seule C-L qui annule les $(\vec{u}_i)$ est la C-L triviale. En particulier, si $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \in E^n$, alors $\mathscr{F}$ est libre si :*

$$\big(\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n\big),\ \big(\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n = \vec{0}_E \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0\big)$$

- *$\mathscr{F}$ est une **base** de E si elle est libre et génératrice.*

Savoir-faire : montrer qu'une famille est libre à l'aide de la définition.

Proposition.— Propriétés des familles libres et génératrices

- Si $\vec{0} \in \mathscr{F}$, $\mathscr{F}$ est liée.
- Si $\mathscr{F} = (\vec{u})$, $\mathscr{F}$ est libre *si et seulement si* $\vec{u} \neq \vec{0}$.
- Si $\mathscr{F} = (\vec{u}; \vec{v})$, $\mathscr{F}$ est libre *si et seulement si* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
- Si $\mathscr{F}$ est libre et $\mathcal{L} \subseteq \mathscr{F}$ est une sous-famille de $\mathscr{F}$, alors $\mathcal{L}$ est libre.
- Si $\mathscr{F}$ est liée, et $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{L}$ est une sur-famille de $\mathscr{F}$, alors $\mathcal{L}$ est liée.
- Si $\mathscr{F}$ est génératrice et $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{G}$ est une sur-famille de $\mathscr{F}$, $\mathcal{G}$, alors $\mathcal{G}$ est génératrice.

Théorème.— Caractérisation des bases[1] —. Soit E un $\mathbf{K}$-e.v et $\mathcal{B} = (\vec{b}_i)_{i \in I}$ une famille finie de vecteurs de E.

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est un base de } E \textit{ ssi } \text{pour tout } \vec{x} \in E, \text{ il existe un } n\text{-uplet } (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, \text{unique tel que } \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{b}_i}$$

Connaître : les bases canoniques de $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}_n[X]$, $\mathbf{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.