Chapitre 30

Variables aléatoires réelles finies

Sommaire

I Variables aléatoires réelles finies . . . 745
1 Définition-Exemples . . . 745
2 Fonction d'une variable aléatoire réelle finie . . . 745
II Loi de probablité d'une variable aléatoire finie . . . 746
1 Définition . . . 746
2 Propriétés des lois de probabilités . . . 746
3 Loi d'une fonction d'une variable aléatoire réelle finie . . . 747
4 Fonction de répartition . . . 748
III Moments d'une variable aléatoire réelle finie . . . 750
1 Espérance . . . 750
2 Variance . . . 752
3 Moments d'ordre r . . . 753
IV Lois finies usuelles . . . 754
1 Le modèle équiprobable : loi uniforme . . . 754
2 Le schéma succès-échec : loi de Bernouilli . . . 754
3 Nombre de succès en n tentatives . . . 755
4 Temps d'attente du premier succès . . . 759
V How To . . . 763

Introduction

Pour résoudre les problèmes de probabilités dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, nous avons besoin de faire des calculs sur les événements. Ces calculs ne sont pas *a priori* possibles dans Ω : il faut pour cela se placer dans $\mathbf{R}$. On définit donc une application

$$X : \Omega \to \mathbf{R}$$

qui permet d'*attribuer* à chaque élément de Ω une *valeur* numérique.

Exemple : Lorsqu'on joue aux cartes, une valeur numérique est attribuée à chaque figure :

- un *valet* vaut 2 points
- une *dame* vaut 3 points
- un *roi* vaut 4 points
- un *as* vaut 5 points

tandis que les autres cartes valent 1 point.
Ceci définit une application de l'ensemble des cartes vers $\mathbf{R}$.
Imaginons que le joueur pioche 2 cartes. On peut s'intéresser à la probabilité que ses deux cartes valent au total 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 points.

On comprend sur cet exemple qu'il ne suffit pas que $X : \Omega \to \mathbf{R}$ soit une application. On veut aussi calculer la probabilité de certains événements liés à X : quelle est la probabilité que X vale 2, 3, etc... ?
Afin de pouvoir *mesurer* sa probabilité qui n'est définie que sur la tribu $\mathcal{A}$, il est nécessaire que $E = \{\omega \in \Omega |\, X(\omega) = 2\}$ soit élément de la tribu, i.e. soit un événement.
Cet exemple préliminaire conduit à adopter la définition suivante :

Définition : *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé. On appelle* ***variable aléatoire réelle*** *sur Ω toute application*

$$X : \Omega \to \mathbf{R}$$

qui vérifie la propriété suivante :

pour tout intervalle I de $\mathbf{R}$, $\{\omega \in \Omega |\, X(\omega) \in I\}$ appartient à $\mathcal{A}$.

Notation : *Etant donnés une variable aléatoire X sur un espace probabilisé, et I un intervalle de $\mathbf{R}$, l'image réciproque de I par l'application X*

$$\bar{X}^1(I) = \{\omega \in \Omega |\, X(\omega) \in I\}$$

est donc un événement lié à X, on le note simplement $[X \in I]$.
Par exemple si $I = [a, b[$, on note aussi $\big[a \leq X < b\big]$ l'événement $\big[X \in [a, b[\big]$, si $I = \{a\}$, on note simplement $[X = a]$ l'événement $\big[X \in \{a\}\big]$.

L'étude des variables aléatoires réelles est découpée en trois parties.

1. nous envisageons le cas particulier des **variables aléatoires réelles finies**, c'est-à-dire lorsque l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est fini.
2. puis, grâce à un résultat d'approximation nous étendons les résultats obtenus au cas des **variables aléatoires réelles discrètes**, c'est-à-dire lorsque $X(\Omega)$ est dénombrable.
3. enfin, vous étudierez en deuxième année les **variables aléatoires réelles à densité**, c'est-à-dire lorsque l'ensemble $X(\Omega)$ est un intervalle de $\mathbf{R}$.

I Variables aléatoires réelles finies

1 Définition-Exemples

Définition : *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé. On appelle* ***variable aléatoire réelle finie*** *sur Ω toute variable aléatoire réelle*

$$X : \Omega \to \mathbf{R}$$

telle que l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X soit fini.

Notation : *On convient de noter $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et l'on supposera par commodité que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.*

Remarque : La condition de *mesurabilité*

"pour tout intervalle I de $\mathbf{R}$, $\{\omega \in \Omega |\, X(\omega) \in I\}$ appartient à $\mathcal{A}$"

se traduit dans le cadre des v.a.r. finies [1] par $\forall k \in \mathbf{N}, \quad [X = x_k] \in \mathcal{A}$.

Nous illustrerons les propriétés des variables aléatoires finies par les deux expériences suivantes :

Expérience 1 : Un joueur lance une pièce trois fois de suite. On note $\Omega = \{P, F\}^3$ l'univers des possibles. On attribue une valeur aux résultats de chacun des lancers de la façon suivante :

— si "*Pile*" apparaît, le joueur gagne un point.

— si "*Face*" apparaît, le joueur perd un point.

On définit ainsi une variable aléatoire discrète correspondant au *gain* relatif du joueur à l'issue des trois lancers :

$$G : \Omega \to \mathbf{R}$$

Dans ce cas, l'ensemble des valeurs prises par G est $G(\Omega) = \{-3, -1, +1, +3\}$.

Expérience 2 : On lance deux dés à six faces. $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. On s'intéresse à la somme des deux dés. Ceci définit une variable aléatoire

$$S : \Omega \to \mathbf{R}$$

L'ensemble des valeurs prises par S est $S(\Omega) = [\![2, 12]\!]$.

2 Fonction d'une variable aléatoire réelle finie

Proposition 30.1.— Etant donnée une variable aléatoire réelle finie X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ et $g : X(\Omega) \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur $X(\Omega)$. On définit une nouvelle variable aléatoire finie $Y = g \circ X$ par :

$$\begin{array}{rccc} Y & : & \Omega & \to & \mathbf{R} \\ & & \omega & \mapsto & g\big(X(\omega)\big) \end{array}$$

Démonstration ▽

La composée de $X : \Omega \to X(\Omega)$ et de $g : X(\Omega) \to \mathbf{R}$ est une application de Ω dans $\mathbf{R}$. Si I est un intervalle de $\mathbf{R}$, alors

$$\bar{Y}^1(I) = \{\omega \in \Omega |\, g \circ X(\omega) \in I\} = \{\omega \in \Omega |\, X(\omega) \in \bar{g}^1(I)\} = \bar{X}^1\left(\bar{g}^1(I)\right)$$

Comme $\bar{g}^1(I) \subset X(\Omega)$ est fini, il est réunion finie de singletons $\{x\}$ de $X(\Omega)$. Pour chacune de ces valeurs x, $\bar{X}^1(\{x\})$ est élement de $\mathcal{A}$ puisque X est une variable aléatoire réelle. Comme la tribu $\mathcal{A}$ est stable par réunion finie, il en résulte que $\bar{Y}^1(I)$ est élément de $\mathcal{A}$. ▲

Remarque : La démonstration de cette proposition montre que pour tout intervalle I de $\mathbf{R}$, nous avons :

$$[Y \in I] = [X \in \bar{g}^1(I)] = \bigcup_{\{x |\, g(x) \in I} [X = x]\}$$

Exemples : Si X est une variable aléatoire sur Ω, X^2, $aX + b$ sont des variables aléatoires sur Ω.

1. comme dans celui des v.a.r. discrètes

II Loi de probablité d'une variable aléatoire finie

1 Définition

Définition : *Soit X une variable aléatoire réelle finie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. On appelle* ***loi de probabilité*** *de X le n-uplet de couples $(x_i, p_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ où*

$$\boxed{\begin{cases} x_i \in X(\Omega) \\ p_i = p[X = x_i] \end{cases}}$$

Pratiquement étant donnée une variable aléatoire, pour déterminer sa loi :

1. Déterminez l'ensemble des valeurs prises par X.

2. Pour tout $x \in X(\Omega)$, calculez $p\big([X = x]\big)$.

Reprenons les deux exemples précédents :

Expérience 1 : $G(\Omega) = \{-3, -1, +1, +3\}$. On représente la loi de G sous forme d'un tableau :

x_i	-3	-1	$+1$	$+3$
p_i	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Expérience 2 : $S(\Omega) = \{2, \dots, 12\}$. On représente la loi de S sous forme d'un tableau :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

2 Propriétés des lois de probabilités

On peut remarquer sur les exemples précédents que la somme des p_i vaut 1. En fait il s'agit d'une propriété générale des lois de probabilités :

Proposition 30.2.— Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle finie sur Ω de loi $(x_i, p_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in (\mathbf{R} \times \mathbf{R})^n$. Alors

$$\boxed{\text{la famille finie d'événements } ([X = x_i])_{i\in[\![1,n]\!]} \text{ est un système complet d'événements.}}$$

En particulier

$$\boxed{\begin{cases} \forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i \geq 0, \\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \end{cases}}$$

Démonstration ▽

Ceci découle du fait que X est une application surjective sur $\{x_1, \dots, x_n\}$. Plus précisément :

— Comme X est une application les événements $[X = x_i]$ et $[X = x_j]$ sont incompatibles si $i \neq j$.

— Comme $X : \Omega \to \{x_1, \dots, x_n\}$ est surjective $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} [X = x_i]$.

L'égalité énoncée résulte alors du **Corollaire ??**. ▲

Remarque : Réciproquement, on peut démontrer que si $(x_i, p_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in (\mathbf{R} \times \mathbf{R})^n$ est un n-uplet de couples de réels vérifiant

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i \geq 0,\ \text{et}\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Alors (x_i, p_i) est la loi de probabilité d'une v.a.r. finie.

Corollaire 30.3.— Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une v.a.r. finie sur Ω.
La loi de probabilité de X, i.e. $(x_i, p_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in (\mathbf{R} \times \mathbf{R})^n$, définit une probabilité sur $X(\Omega)$.

Démonstration ▽
D'après le **Théorème** 30.5, pour que les p_i définissent une probabilité sur $X(\Omega)$ telle que $\forall i \in 1,n\rrbracket,\ p(x_i) = p_i$, une condition nécessaire et suffisante est justement que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. ▲

Exercice : On considère un dé à six faces truqué : pour $k \in [\![1,6]\!]$ la probabilité d'obtenir k est proportionnelle à k. On note X la variable aléatoire définie par le résultat du lancer :

$$X : \Omega \to [\![1,6]\!]$$

Déterminez la loi de probabilité de X.

3 Loi d'une fonction d'une variable aléatoire réelle finie

Proposition 30.4.— Soit X une variable aléatoire réelle finie sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, p\big)$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Soit $g : X(\Omega) \to \mathbf{R}$ une fonction. On note Y la variable aléatoire $Y = g \circ X$. Alors

$$Y(\Omega) = \{y \in \mathbf{R} |\ \exists i \in [\![1,n]\!],\ y = g(x_i)\}, \text{ et}$$

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad p\big([Y=y]\big) = p\left([X \in \bar{g}^1(\{y\})]\right) = \sum_{\{i/g(x_i)=y\}} p\big([X=x_i]\big)$$

Démonstration ▽

1. $Y(\Omega) = \{y \in \mathbf{R} |\ \exists \omega \in \Omega,\ g\big(X(\omega)\big) = y\} = \{y \in \mathbf{R} |\ \exists i \in [\![1,n]\!],\ y = g(x_i)\}$,
2. Soit $y \in Y$, alors pour tout $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned} \omega \in [Y=y] &\iff Y(\omega) = y \iff g(X(\omega) = y \iff X(\omega) \in \bar{g}^1(\{y\}) \iff \omega \in [X \in \bar{g}^1(\{y\})] \\ &\iff \exists i \in [\![1,n]\!];\ x_i \in \bar{g}^1(\{y\} \text{ et } X(\omega) = x_i \iff \exists i \in [\![1,n]\!];\ x_i \in \bar{g}^1(\{y\} \text{ et } \omega \in [X=x_i]. \end{aligned}$$

Ces équivalences se traduisent ensemblistement par l'égalité :

$$[Y=y] = [X \in \bar{g}^1(\{y\})] = \bigcup_{x_i \in \bar{g}^1(\{y\})} [X=x_i]$$

Comme les $[X=x_i]$ forment un système complet d'événements, ils sont en particulier deux à deux incompatibles. Par la propriété d'additivité (finie en ce cas) des probabilités, il en résulte *at once* que :

$$p[Y=y] = p\big([X \in \bar{g}^1(\{y\})]\big) = \sum_{x_i \in \bar{g}^1(\{y\})} p\big([X=x_i]\big)$$

▲

3.a Loi de $aX + b$

Reprenons l'**Expérience 2** et considérons la variable aléatoire $T = 2S - 4$. L'ensemble des valeurs prises est $\{0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$. La loi de $2S-4$ est donnée par le tableau :

t_i	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$p[T=t_i]$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

3.b Loi de X^2

Reprenons l'**Expérience 1** et déterminons la loi de $H = G^2$: l'ensemble des valeurs prises est $\{1,9\}$ et la loi de G^2 est donnée par :

h_i	+1	+9
$p[H=h_i]$	3/4	1/4

4 Fonction de répartition

Définition : *Soit X une variable aléatoire réelle finie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$. On appelle* ***fonction de répartition*** *de X la fonction*

$$\begin{array}{rccl} F_X & : & \mathbf{R} & \to & [0,1] \\ & & x & \mapsto & p\big([X \leq x]\big) \end{array}$$

Lemme 30.5.— Soient X une variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ et F_X sa fonction de répartition. On suppose que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ où $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Alors pour tout nombre réel $x \in \mathbf{R}$:

- si $x < x_1$, $F_X(x) = 0$,
- s'il existe $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $x_k \leq x < x_{k+1}$, $F_X(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i$,
- si $x_n \leq x$, $F_X(x) = 1$.

Démonstration ▽
Soit $x \in \mathbf{R}$

- si $x < x_1$, $[X \leq x_1] = \emptyset$ est l'événement impossible, par conséquent $F_X(x) = 0$.
- si $x_k \leq x < x_{k+1}$, où $k \in [\![1, n-1]\!]$. Alors $[X \leq x] = \bigcup_{i=1}^{k} [X = x_i]$. Comme les événements $[X = x_i]$ sont deux à deux incompatibles, il en résulte par additivité finie que $F_X(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i$.
- enfin si $x_n \leq x$, alors $[X \leq x] \supset [X \leq x_n] = \Omega$. Ainsi $[X \leq x]$ est l'événement certain. Par suite $F_X(x) = 1$.

▲

Exemple : Reprenons l'**Expérience 1**. Nous pouvons facilement déterminer le graphe de la fonction de répartition F_G de G :

FIGURE ABSENTE

A partir de la loi de probabilité d'une v.a.r. finie X, le **Lemme** 31.5 permet de calculer la fonction de répartition F_X. Inversement, connaissant la fonction de répartition de X, il est possible de retrouver la loi de X connaissant sa fonction de répartition grâce au corollaire suivant :

Corollaire 30.6.— Soient X une variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ et F_X sa fonction de répartition. On suppose que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ où $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Alors pour tout nombre réel $x \in \mathbf{R}$:

- $p_1 = F_X(x_1)$
- $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $p_i = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$

COMMENTAIRES : autrement dit la loi d'une variable aléatoire est entièrement caractérisée par sa fonction de répartition.

Démonstration ▽
Le premier point découle directement du **Lemme** above appliqué à $x = x_1$. Pour le deuxième point, le **Lemme** précédent donne

$$F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}) = \sum_{k=1}^{i} p_k - \sum_{k=1}^{i-1} p_k = p_i.$$ ▲

Proposition 30.7.— Soient X une variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, p\big)$ et F_X sa fonction de répartition.

1. $F_X : \mathbf{R} \to [0,1]$ est une fonction en escalier, croissante et continue à droite.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

3. $\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2$, tel que $a < b$, $p\big([a < X \leq b]\big) = F_X(b) - F_X(a)$.

COMMENTAIRES : Une fonction de répartition est une fonction monotone. Elle présente une discontinuité de première espèce en chacune des valeurs x_i prise par la variable aléatoire X. La valeur du $i^{\text{ième}}$ saut de discontinuité est p_i.

Démonstration ▽

Les deux premières assertions découlent directement du **Lemme** 31.5. Montrons le **3.**

Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, tel que $a < b$. Alors $[X \leq b] = [X \leq a] \sqcup [a < X \leq b]$. La réunion étant disjointe, la propriété d'additivité finie de la probabilité permet de déduire de cette égalité ensembliste l'égalité : $p\big([X \leq b]\big) = p\big([X \leq a]\big) + p\big([a < X \leq b]\big)$, autrement dit $p\big([a < X \leq b]\big) = F_X(b) - F_X(a)$. ▲

Exercice : Soit $F : \mathbf{R} \to [0,1]$ la fonction en escalier définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ 1/2 & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ 3/4 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

On suppose que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, p\big)$. Déterminez la loi de probabilité de X.

III Moments d'une variable aléatoire réelle finie

1 Espérance

1.a Définition

Définition : *Soit X une variable aléatoire réelle finie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, de loi de probabilité $(x_i, p_i)_{1\leq i\leq n}$. On appelle* ***espérance mathématique*** *de X le nombre*

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i}$$

Remarque : L'espérance de X est la **moyenne des valeurs** prises par X, pondérée par leurs probabilités.

Exemple : Reprenons l'**Expérience 1**. A partir de la loi de G, nous pouvons facilement calculer l'espérance de gain du joueur :

$$E(G) = -3/8 - 3/8 + 3/8 + 3/8 = 0$$

Définition : *Une variable aléatoire est dite* ***centrée*** *si $E(X) = 0$.*

Vocabulaire : un jeu est dit **équitable** si l'éspérance de gain du joueur est nulle.

Exemple : *satisfait ou remboursé !*
Avant l'invention de l'échographie, un grand sage propose aux femmes enceintes de *prédire* le sexe de leur bébé. Il demande 200 F pour sa prédiction avec la garantie *satisfait ou remboursé !*
Notons F la variable aléatoire finie correspondant au gain du grand sage. Les valeurs possibles pour F sont 0 et 200.
On admet que le grand sage annonce le bon sexe avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Son espérance de gain est donc :

$$E(F) = 0 \times \frac{1}{2} + 200 \times \frac{1}{2} = 100$$

quel beau métier !

1.b Propriétés de l'espérance

Proposition 30.8.— Soient X une variable aléatoire réelle finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, a et b deux réels.

$$\boxed{\textbf{Si } \text{pour tout } i \in [\![1, n]\!],\ a \leq x_i \leq b, \textbf{ alors } a \leq E(X) \leq b.}$$

En particulier, si X est constante égale à $a \in \mathbf{R}$, alors $E(X) = a$.

Corollaire 30.9.— Soit X une variable aléatoire réelle finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, p)$. On suppose que X est à valeurs **positives**. Alors

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ E(X) \geq 0 \\ \bullet\ E(X) = 0 \iff p\big([X = 0]\big) = 1 \end{array}}$$

Vocabulaire : lorsque $p\big([X = 0]\big) = 1$, on dit que X est presque sûrement nulle.

1.c Théorème de transfert

Pour calculer l'espérance d'une v.a.r. $Y = g \circ X$ fonction d'une autre variable aléatoire, il n'est pas nécessaire de déterminer la loi de Y. La seule connaissance de celle de X suffit, comme le montre le **Théorème** qui suit :

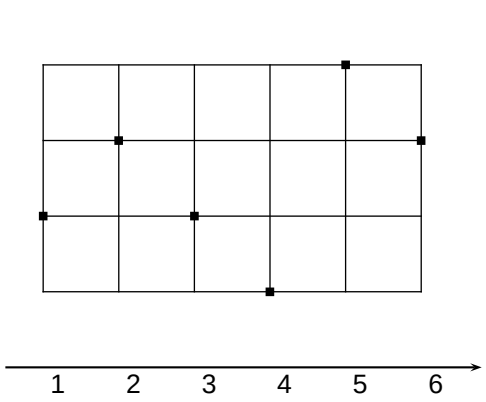
Théorème 30.10.— THÉORÈME DE TRANSFERT
Soit X une variable aléatoire réelle finie sur $\big(\Omega, \mathcal{A}, p\big)$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $g : X(\Omega) \to \mathbf{R}$ une fonction. L'espérance de $Y = g \circ X$ est donnée par

$$\boxed{E(Y) = E(g \circ X) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\, p\big([X = x_i]\big)}$$

COMMENTAIRES : ce résultat est tout à fait naturel si l'on se rappelle que l'espérance de $Y = g \circ X$ représente la valeur moyenne de Y. Toutefois, la démonstration n'est pas triviale, même dans le cas des v.a.r. finies.

Démonstration ▽
Notons $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Par définition de l'espérance de Y, nous avons

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j=1}^{m} y_j\, p\big([Y = y_j]\big) \\ &= \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i/g(x_i)=y_j} p\big([X = x_i]\big) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i/g(x_i)=y_j} y_j\, p\big([X = x_i]\big) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i/g(x_i)=y_j} g(x_i)\, p\big([X = x_i]\big). \end{aligned}$$



Notons pour $j \in [\![1, m]\!]$, $A_j = \{i \in [\![1, n]\!] \,|\, g(x_i) = y_j\}$. Comme g est une application, $(A_j)_{j \in [\![1,m]\!]}$ forme une partition de $[\![1, n]\!]$. Par suite :

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i \in A_j} g(x_i)\, p\big([X = x_i]\big) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\, p\big([X = x_i]\big).$$

▲

Corollaire 30.11.— Soient a, b deux réels, $k \in \mathbf{N}$ un entier naturel et X une variable aléatoire réelle finie sur $\big(\Omega, \mathcal{A}, p\big)$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Alors

$$\boxed{\begin{array}{ll} \textbf{1.} & E(aX + b) = a\, E(X) + b \\ \textbf{2.} & E(X^k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^k\, p\big([X = x_i]\big) \end{array}}$$

Définition : *Soit X une v.a.r., on appelle* ***variable aléatoire centrée associée à X*** *la variable aléatoire réelle $\tilde{X} = X - E(X)$.*

COMMENTAIRES : cette définition est justifiée par le **Corollaire** 31.11 puisque

$$E\big(X - E(X)\big) = E(X) - E(X) = 0.$$

Exercice : Calculez $E(G^2)$, où G est le gain du joueur dans l'**Expérience 1**,

1. en utilisant la loi de G^2,

2. en utilisant la loi de G seulement.

2 Variance

Comme nous l'avons vu, l'**espérance** d'une variable aléatoire représente la valeur moyenne de cette variable aléatoire pondérée par les probabilités des événements $[X = x_i]$. Il s'agit d'une **mesure de position**. Par conséquent, la variable aléatoire *se répartit autour de son espérance*. La **variance** de la variable aléatoire mesure l'*écart* entre la variable aléatoire et son espérance : il s'agit d'une **mesure de dispersion**.

Définition : *Soit X une variable aléatoire réelle finie sur l'espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, p\big)$.*

- *On appelle **variance de X** et on note $V(X)$, le nombre positif*

$$\boxed{V(X) = E\Big[\big(X - E(X)\big)^2\Big]}$$

- *On appelle **écart-type de X** et on note $\sigma(X)$, le nombre positif $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.*

Commentaires : comme $\big(X - E(X)\big)^2$ est une variable aléatoire positive, son espérance est positive. Ce qui assure que l'écart-type est bien défini.

Remarque : par définition $V(X) = E(\tilde{X}^2)$ où $\tilde{X}$ est la variable aléatoire centrée associée à X. Notons m l'espérance de X. Le théorème de transfert montre que

$$\boxed{V(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p\big([X = x_i]\big)}$$

En particulier lorsque la variable X est centrée $V(X) = E(X^2)$.

Exercice : Calculez la variance de G dans l'**Expérience 1** et de S dans l'**Expérience 2**.

2.a Propriétés de la variance

La première propriété de la variance est très naturelle si on l'interprète en terme de dispersion :

Proposition 30.12.— Soit X une variable aléatoire réelle finie sur l'espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, p\big)$. Alors

$$V(X) = 0 \iff X = E(X) \; p.s.$$

Démonstration ▽
Notons $\tilde{X} = X - E(X)$. Par définition, $V(X)$ est l'espérance de la variable aléatoire positive $\tilde{X}^2$. Ainsi, d'après le **Corollaire** 31.9,

$$V(X) = 0 \iff \tilde{X}^2 = 0 \; ps \iff \tilde{X} = 0 \; ps \iff X = E(X) \; ps$$

▲

La deuxième propriété donne une formulation équivalente de la variance, facile[2] à mettre en œuvre grâce au Théorème de transfert (plus précisément le **Corollaire** 31.11) :

Proposition 30.13.— Formule de Huygens
Soit X une variable aléatoire réelle finie sur l'espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, p\big)$. Alors

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2}$$

Démonstration ▽

2. et souvent préférable à la définition même

D'après le **Théorème** 31.10, nous avons, avec les notations usuelles pour les valeurs de X et m pour $E(X)$

$$\begin{aligned} V(X) &= E\Big[\big(X-E(X)\big)^2\Big] = \sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2mx_i + m^2)p_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p_i - \sum_{i=1}^{n} 2mx_i\, p_i + \sum_{i=1}^{n} m^2\, p_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p_i - 2m\sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i + m^2 \sum_{i=1}^{n} p_i \\ &= E(X^2) - 2mE(X) + m^2 = E(X^2) - m^2. \end{aligned}$$

▲

La proposition suivante découle de la **Proposition** 31.11 :

Proposition 30.14.— Soient X une variable aléatoire réelle finie sur l'espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, p\big)$ et $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ un couple de réels. Alors

- $V(a\,X+b) = a^2 V(X)$
- $\sigma(a\,X+b) = |a|\sigma(X).$

Démonstration ▽

Par définition de la variance $V(aX+b) = E\Big[\big(aX+b-E(aX+b)\big)^2\Big]$. Comme d'après la **Proposition** 31.11 $E(aX+b) = aE(X)+b$, il vient tout d'abord :

$$\big(aX+b-E(aX+b)\big)^2 = \big(aX+b-aE(X)-b\big)^2 = a^2\big(X-E(X)\big)^2$$

Une autre application de cette proposition *yields*

$$V(X) = E\Big[a^2\,\big(X-E(X)\big)^2\Big] = a^2\,E\Big[\big(X-E(X)\big)^2\Big] = a^2\,V(X).$$

▲

3 Moments d'ordre r

Définition : *Soit X une variable aléatoire réelle finie sur l'espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, p\big)$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. On définit pour tout entier naturel non nul $r \in \mathbf{N}^\star$, le* ***moment d'ordre r*** *de X par :*

$$\boxed{m_r(X) = E(X^r) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r\, p\big([X=x_i]\big)}$$

Remarque : ainsi, l'espérance de X n'est autre que le moment d'ordre 1 de la variable aléatoire X.

Définition : *Soit X une variable aléatoire réelle finie sur l'espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, p\big)$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. On définit pour tout entier naturel non nul $r \in \mathbf{N}^\star$, le* ***moment centré d'ordre r*** *de X par :*

$$\boxed{\mu_r(X) = m_r(\tilde{X}) = E\Big[\big(X-E(X)\big)^r\Big] = \sum_{i=1}^{n}\big(x_i-E(X)\big)^r\, p\big([X=x_i]\big)}$$

Remarque : ainsi la variance de X est le moment centré d'ordre 2 de X

IV Lois finies usuelles

1 Le modèle équiprobable : loi uniforme

Exercice : Exemple typique de v.a.r. suivant une loi uniforme

Soit Ω un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbf{N}^\star$. Ω est muni de la probabilité uniforme.
Soit X une bijection de Ω sur $[\![1,n]\!]$.

Déterminez la loi de X.

Définition : *Soit X une v.a.r. sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ et $\{x_1, \dots, x_n\}$ un n-uplet de réels deux à deux distincts. On dit que X* ***suit la loi uniforme*** *sur $\{x_1, \dots, x_n\}$, si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et*

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!], \quad p[X = x_i] = 1/n}$$

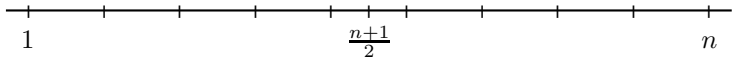
Notation : *On note $X \rightsquigarrow \mathcal{U}(\{x_1, \dots, x_n\})$.*

Exemple : On choisit au hasard un nombre entier entre 1 et 10. Si X désigne le nombre obtenu, $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1,10]\!])$.

Proposition 30.15.— Si X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, alors

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ E(X) = \dfrac{n+1}{2} \\ \bullet\ V(X) = \dfrac{n^2-1}{12} \end{array}}$$

COMMENTAIRES : sur cet exemple très simple de loi, on peut visualiser l'espérance comme mesure de position et la variance comme mesure de dispersion.



Démonstration ▽

- $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{n} = \frac{n\,(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$
- $E(X^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\frac{1}{n} = \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$.

D'après la formule de HUYGENS, il en résulte que

$$V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = (n+1)\frac{4n+2-3n-3}{12} = \frac{n^2-1}{12}.$$

▲

Exercice : Soit X une v.a.r. suivant la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$, où $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ vérifient $a < b$.
Calculez l'espérance et la variance de X.

2 Le schéma succès-échec : loi de Bernouilli

Exercice : Exemple typique de v.a.r. suivant une loi de Bernouilli

On considère une expérience aléatoire e qui a deux issues : le succès A ou l'échec B.
On suppose que la probabilité que A se réalise est p.
On associe à cette expérience la v.a.r. X définie par

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ \omega \in A \\ 0 & si\ \omega \notin A \end{cases}$$

Déterminez la loi de X

Solution ▽
Soit Ω l'ensemble des résultats possibles. On note $\mathcal{A}$ la tribu engendrée par A : $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, B, \Omega\}$. Alors

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = 1 \iff \omega \in A$$

Par conséquent $p[X = 1] = p(A) = p$ et $p[X = 0] = p(\bar{A}) = 1 - p$. ▲

Définition : *Soit X une v.a.r. sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$. On dit que X* ***suit la loi de Bernouilli de paramètre*** *$p \in [0, 1]$ si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et*

$$\boxed{p[X = 1] = p \quad et \quad p[X = 0] = q = 1 - p}$$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(1, p)$.

COMMENTAIRES : une variable de Bernouilli associée à l'événement A est $X = \mathbb{1}_A$.

Proposition 30.16.— Si X suit la loi de Bernouilli de paramètre $p \in [0, 1]$, alors

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ E(X) = p \\ \bullet\ V(X) = p(1-p) = pq \end{array}}$$

Démonstration ▽

• Calcul de l'espérance :$E(X) = 1 \times p([X = 1]) + 0 \times p([X = 0]) = p$.
• Calcul de la variance par la formule de Huygens $V(X) = 1^2 \times p[X = 1] + 0^2 \times p[X = 0] - p^2 = p - p^2 = p\,(1-p) = p\,q$.
▲

A partir d'une expérience e à deux issues, A et B, nous allons définir d'autres variables aléatoires en répétant l'expérience e. Nous pouvons

— répeter n fois l'expérience e –de façon indépendante ou pas– et nous intéresser au nombre de *succès* obtenus.

— répeter indéfiniment l'expérience e –de façon indépendante ou pas– et nous intéresser au temps d'attente du premier succès.

La loi de Poisson apparaît souvent comme limite de variables associées à des expériences de Bernouilli.
La loi de Bernouilli est donc fondamentale dans l'étude des lois discrètes usuelles. Reportez-vous à l'organigramme donné dans le **How To**.

3 Nombre de succès en n tentatives

3.a Modèle sans remise : loi hypergéométrique

Exercice : Exemple typique de v.a.r. suivant une loi hypergéométrique

Un ensemble E est constitué de N éléments répartis en deux catégories : les bons A, et les méchants B en proportions données.
On effectue au hasard un ***tirage sans remise*** *de n éléments de E. On note X le nombre de bons éléments prélevés.*

Une urne $\mathcal{U}$ contient N boules blanches ou noires. Il y a une proportion p de boules blanches et une proportion q de boules noires. On effectue dans cette urne des tirages **sans remise** de n boules. On note X le nombre de boules blanches obtenues.
Déterminez la loi de X.

Solution ▽
Soit $\Omega = \mathcal{C}(n, \mathcal{U})$ l'ensemble des parties à n éléments de l'urne $\mathcal{U}$. Comme le tirage se fait au hasard, il y a équiprobabilité. Par conséquent Ω est muni de la probabilité uniforme.

$$\mathit{Card}\ (\Omega) = \binom{N}{n}$$

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Le nombre de parties à n éléments de $\mathcal{U}$ constitués exactement de k boules blanches est

$$\binom{Np}{k} \times \binom{Nq}{n-k}$$

D'où

$$\boxed{p(X=k) = \frac{\binom{Np}{k} \times \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

▲

Rappel : Formule de VAN DER MONDE
Soient n, n_1, n_2 des entiers naturels tels que $0 \leq n \leq \min\{n_1, n_2\}$, alors

$$\boxed{\binom{n_1+n_2}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}}$$

Définition : *Soient N et n des entiers et $p \in [0,1]$ tels que $0 \leq n \leq N$ et $Np \in \mathbf{N}$. Soit X une v.a.r. sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$. On dit que X* ***suit la loi hypergéométrique*** *de paramètres N, n et p si $X(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$, et*

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!], \quad p[X=k] = \frac{\binom{Np}{k} \times \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

où $q = 1-p$.

Notation : *On note $X \rightsquigarrow \mathcal{H}(N,n,p)$.*

Remarques :

1. Lorsque $n=1$, il s'agit tout simplement d'une v.a.r. de Bernouilli de paramètre p.
2. Dans le cas général, on vérifie grâce à la formule de Van der Monde (rappelée ci-dessus) qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

Vocabulaire : la loi hypergéométrique est aussi appelée la **loi des tirages sans remise** ou encore **loi des sondages.** En effet, on peut rencontrer cette loi sous la forme suivante :

Exemple : Aux élections deux candidats se présentent : a et b. Les votants se répartissent en deux catégories :

— A est l'ensemble des électeurs qui soutiennent a,

— B est l'ensemble des électeurs qui soutiennent b.

On suppose qu'il y a une proportion de p partisans de a dans la population globale, c'est-à-dire

$$p = \frac{\mathsf{Card}\ A}{N} = \frac{\mathsf{Card}\ A}{\mathsf{Card}\ A + \mathsf{Card}\ B}$$

Au bureau de vote de Lanester, n bulletins sont dépouillés. Le nombre de voix en faveur du candidat a à Lanester suit une loi hypergéométrique de paramètres N, n et p.

Proposition 30.17.— Si X suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n et p, alors

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ E(X) = np \\ \bullet\ V(X) = npq\,\dfrac{N-n}{N-1} \end{array}}$$

où $q = 1-p$.

Nb : La variance d'une v.a.r. suivant une loi hypergéométrique n'est pas exigible.

COMMENTAIRES : l'expression de l'espérance d'une loi hypergéométrique est on ne peut plus intuitive : si on prélève n boules dans une urne contenant une proportion p de boules blanches, on obtiendra en *moyenne* np boules blanches.

Rappel : $\forall (n,p) \in \mathbf{N}^2$, $p \times \binom{n}{p} = n \times \binom{n-1}{p-1}$ et $p\,(p-1) \times \binom{n}{p} = n\,(n-1) \times \binom{n-2}{p-2}$

Démonstration $\triangledown$

- calcul de l'espérance

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{n} k \binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k} \\ &= \frac{Np}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} \binom{Np-1}{k-1} \binom{Nq}{n-k} \\ &= \frac{Np}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{Np-1}{k} \binom{Nq}{n-1-k} \\ &= \frac{Np}{\binom{N}{n}} \binom{N-1}{n-1} \\ &= Np\frac{n}{N} = np. \end{aligned}$$

- calcul de la variance

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k} \\ &= \frac{Np}{\binom{N}{n}} \left(\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k \binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k} \right) \\ &= np + \frac{Np(Np-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=2}^{n} \binom{Np-2}{k-2} \binom{Nq}{n-k} \\ &= np + \frac{Np(Np-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{Np-2}{k} \binom{Nq}{n-2-k} \\ &= np + Np(Np-1) \frac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}} \\ &= np + Np(Np-1) \frac{n(n-1)}{N(N-1)}. \end{aligned}$$

D'où je tire, grâce à la formule de HUYGENS

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{N-1} \left(np(N-1) + np(n-1)(Np-1) - n^2p^2(N-1) \right) \\ &= \frac{np}{N-1} \left(N-1 + (n-1)(Np-1) - np(N-1) \right) \\ &= \frac{np}{N-1} \left(N - n - Np + np \right) = n\,p\,q \frac{N-n}{N-1}. \end{aligned}$$

$\blacktriangle$

3.b Modèle avec remise : loi binomiale

Exercice : Exemple typique de v.a.r. suivant une loi binomiale

On considère une expérience aléatoire e qui a deux issues : le succès A ou l'échec B.
On suppose que la probabilité que A se réalise est p.
On répète n fois, de façon indépendante l'une de l'autre, l'expérience e.
On note X le nombre de succès obtenus en n tentatives.

On effectue n lancers d'une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir *pile* est $p \in]0,1[$. On note X le nombre de $Pile$ obtenus. Déterminez la loi de X

Solution ▽
Soit $\Omega = \{P,F\}^n$ l'ensemble des résultats possibles avec des notations évidentes. $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
Notons pour $k \in [\![1,n]\!]$ P_k l'événement "$Pile$ au $k^{\text{ième}}$ lancer" et F_k l'événement "$Face$ au $k^{\text{ième}}$ lancer"
On équipe Ω de la tribu de partie $\mathcal{A}$ engendrée par les P_k.
Soit $k \in [\![0,n]\!]$ fixé. On s'intéresse à l'événement $[X=k]$.
Notons $\mathcal{C}(k,n)$ l'ensemble des parties I de $[\![1,n]\!]$ à k éléments et définissons pour tout $I \in \mathcal{C}(k,n)$ tel que $I = \{i_1,\dots,i_k\}$, $P_I = P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_k}$. Avec ces notations, nous pouvons écrire que :

$$[X=k] = \bigcup_{I \in \mathcal{C}(k,n)} P_I \cap F_{\bar{I}} \tag{30.1}$$

- *Soit $I \in \mathcal{C}(k,n)$ fixé. Les expériences e étant conduites de façon indépendantes les unes des autres, il en résulte que*

$$p\Big(P_I \cap F_{\bar{I}}\Big) = p^k\, q^{n-k}$$

- *De plus la réunion dans (31.1) étant disjointe, il en résulte par additivité que*

$$p\Big([X=k]\Big) = \sum_{I \in \mathcal{C}(k,n)} p^k\, q^{n-k} = \text{Card } \big(\mathcal{C}(k,n)\big) p^k\, q^{n-k}$$

Finalement, pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$,

$$p\Big([X=k]\Big) = \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k}$$

▲

Définition : *Soit X une v.a.r. sur l'espace probabilisé $\big(\Omega,\mathcal{A},p\big)$. On dit que X* ***suit la loi binomiale*** *de paramètres $n \in \mathbf{N}^\star$ et $p \in [0,1]$, si $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et*

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!], \quad p[X=k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$$

où $q = 1-p$.

Notation : *On note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$.*

Remarques :

1. Lorsque $n=1$, il s'agit tout simplement d'une v.a.r. de Bernouilli.

2. Dans le cas général, on vérifie par la formule du binôme que $\sum_0^n p[X=k] = 1$.

Proposition 30.18.— Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ E(X) = np \\ \bullet\ V(X) = n\,p\,(1-p) = npq \end{array}}$$

Démonstration ▽

- calcul de l'espérance

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} q^{n-1-k} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k} = np. \end{aligned}$$

• calcul de la variance

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=2}^{n} k.(k-1)\binom{n}{k}p^k q^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \\ &= n\,(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^k q^{n-k} + n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k q^{n-k} \\ &= n\,(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}p^{k+2} q^{n-2-k} + n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^{k+1} q^{n-1-k} \\ &= n\,(n-1)p^2 + n\,p \end{aligned}$$

D'où je tire par la formule de Huygens

$$V(X) = n\,(n-1)p^2 + n\,p - n^2\,p^2 = n\,p\big((n-1)p + 1 - np\big) = np(1-p).$$

▲

4 Temps d'attente du premier succès

4.a Modèle avec remise : loi géométrique

Exercice : Exemple typique de v.a.r. suivant une loi géométrique

On considère une expérience aléatoire e qui a deux issues : le succès A ou l'échec B.
On suppose que la probabilité que A se réalise est p.
On répète indéfiniment cette expérience e, de façon indépendante l'une de l'autre.
On note X le temps d'attente avant le premier succès.

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir *pile* est $p \in]0,1[$. On note X le nombre de tentatives nécessaires pour obtenir le premier $Pile$. Déterminez la loi de X

Solution ▽
Soit $\Omega = \{P,F\}^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des résultats possibles avec des notations évidentes.
Notons pour $k \in \mathbf{N}^\star$, P_k l'événement "$Pile$ au $k^{\text{ième}}$ lancer" et F_k l'événement "$Face$ au $k^{\text{ième}}$ lancer"
On équipe Ω de la tribu de parties $\mathcal{A}$ engendrée par les P_k.
Par construction, X est une application

$$X : \Omega \to \mathbf{N}^\star \cup \{+\infty\}$$

Nous allons démontrer qu'il s'agit d'une variable aléatoire et déterminer sa loi :

• *l'événement $[X = +\infty]$*

$$[X = +\infty] = \bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k$$

Il en résulte d'une part que $[X = +\infty]$ est élément de la tribu et de plus

$$p([X = +\infty] = \lim_{n\to+\infty} p\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_k\right)$$

La famille d'événements (F_k) étant indépendante, il s'en suit que $p\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_k\right) = \prod_{k=1}^{n} p(F_k) = q^n$. Comme $q = 1-p \in]0,1[$, il vient finalement

$$p[X = +\infty] = 0$$

• *l'événement $[X = k]$*
Soit $k \in \mathbf{N}^\star$,

$$[X = k] = F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k$$

Il en résulte comme précédemment que $[X = k]$ est élément de $\mathcal{A}$ et que

$$p[X = k] = q^{k-1} \times p$$

▲

Définition : *Soit X une v.a.r. sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$. On dit que X* ***suit la loi géométrique de paramètre*** *$p \in]0,1[$ si $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$, et*

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N}^\star, \quad p[X=k] = p\,(1-p)^{k-1}}$$

Notation : *On note $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$.*

Remarques :

1. Il s'agit bien d'une loi de probabilité car

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p[X=k] = p\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^k = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

2. comme dans l'exemple ci-dessus, on dit encore que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ si

$$X : \Omega \to \mathbf{N}^\star \cup \{+\infty\}$$

vérifie $p([X=+\infty]) = 0$ et $\forall k \in \mathbf{N}^\star, \quad p[X=k] = p\,(1-p)^{k-1}$.

Proposition 30.19.— Si X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, alors X possède une espérance et une variance qui sont données par :

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ E(X) = \dfrac{1}{p} \\ \bullet\ V(X) = \dfrac{1-p}{p^2} = \dfrac{q}{p^2} \end{array}}$$

où $q = 1-p$.

Démonstration ▽

- calcul de l'espérance

  Soit $N \in \mathbf{N}^\star$, notons E_N la somme partielle de rang N de la série de terme général $k\,p[X=k]$.

$$E_N = \sum_{k=1}^{N} k\,p\,q^{k-1} = p\sum_{k=1}^{N} k\,q^{k-1}.$$

  Or, d'après le **Théorème** 28.14 comme $0<q<1$, la série $\sum k\,q^{k-1}$ est (absolument) convergente. Il en résulte que X admet une espérance et

$$E(X) = \frac{p}{\big(1-(1-p)\big)^2} = \frac{1}{p}$$

- calcul de la variance

  Soit $N \in \mathbf{N}^\star$, notons F_N la somme partielle de rang N de la série de terme général $k^2\,p[X=k]$.

$$\begin{aligned} F_N &= \sum_{k=1}^{N} k^2\,p\,q^{k-1} = p\sum_{k=2}^{N} k\,(k-1)\,q^{k-1} + p\sum_{k=1}^{N} k\,q^{k-1} \\ &= 2pq\sum_{k=2}^{N}\binom{k}{2} q^{k-2} + p\sum_{k=1}^{N} k\,q^{k-1}. \end{aligned}$$

  Je reconnais ici les sommes partielles des séries géométriques de raison q dérivée une fois et dérivée deux fois. Comme $0<q<1$, j'en déduis que X^2 admet une espérance et

$$E(X^2) = \frac{2pq}{p^3} + \frac{p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$$

  D'où je tire finalement par la formule de Huygens

$$V(X) = \frac{2-p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

▲

Théorème 30.20.— Caractérisation des lois géométriques

Soit X une v.a.r. telle que $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$.

$$X \text{ suit une loi géométrique } \textit{si et seulement si } \begin{cases} p([X=1]) \in]0,1[\\ \forall (k,l) \in (\mathbf{N}^\star)^2,\ p[X > k+l/X > k] = p[X > l] \end{cases}$$

En ce cas, le paramètre de la loi de X est $p = p([X=1])$.

Commentaires : ce théorème montre qu'une loi géométrique est le temps d'attente du premier succès dans un *processus sans mémoire*. En effet, reprenons le schéma succès-échec et supposons que l'événement $[X > k]$ soit réalisé. Les k premières tentatives ont donc échoué. Le fait que $p[X > k+l/X > k] = p[X > l]$ se traduit en ce contexte en disant que -du point de vue de la loi de X- ces échecs sont sans incidence sur la suite des tentatives. Plus rigoureusement, si $[X > k]$ est réalisé, nous pouvons *changer l'origine* des temps et considérer l'instant k comme nouvelle origine. Définissons donc $\tilde{X}^k = X - k$.

$$p(\tilde{X}^k > l) = p(X > l)$$

Autrement dit, la variable aléatoire X est invariante par changement d'origine des temps, ou encore : elle est sans mémoire.

Démonstration ▽

Condition Nécessaire Supposons que $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$. Alors, bien entendu $p([X=1]) = p$. Donnons-nous $(k,l) \in (\mathbf{N}^\star)^2$.
Par définition de la loi géométrique, nous avons d'une part

$$p\big([X > l]\big) = 1 - p([X \leq l]) = 1 - \sum_{i=1}^{l} p\, q^{i-1} = 1 - p\frac{1-q^l}{p} = 1 - (1-q^l) = q^l.$$

D'autre part, d'après la définition de la probabilité conditionnelle, nous avons

$$\begin{aligned} p[X > k+l/X > k] &= \frac{p\big([X > k+l] \cap [X > k]\big)}{p\big([X > k]\big)} = \frac{p\big([X > k+l]\big)}{p\big([X > k]\big)} \\ &= \frac{q^{k+l}}{q^k} = q^l. \end{aligned}$$

Condition Suffisante Réciproquement soit X une v.a.r. telle que $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$, et

$$\begin{cases} p([X=1]) \in]0,1[\\ \forall (k,l) \in (\mathbf{N}^\star)^2,\ p[X > k+l/X > k] = p[X > l] \end{cases}$$

Notons $q = p([X > 1])$ et pour tout $n \geq 1$, $q_n = p([X > n])$.

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= p\big([X > n+1] \cap [X > n]\big) = p\big([X > n+1/X > n]\big) \times p([X > n]) \\ &= p([X > n]) \times p\big([X > 1]\big) = q \times q_n. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (q_n) est géométrique de raison q. Par conséquent

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad q_n = q^n$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que par additivité $p([X=k]) = p([X > k-1]) - p([X > k])$. Il en résulte en effet que pour tout entier $k \in \mathbf{N}^\star$

$$p([X=k]) = q^{k-1} - q^k = (1-q) \times q^{k-1}$$

Enfin, si p désigne $p([X=1])$, on vérifie immédiatement que $p = 1 - q$. ▲

4.b Modèle sans remise

Ce paragraphe est hors-programme : vous pouvez le voir comme un exercice !

Exercice : Exemple typique de v.a.r. suivant la loi sans nom

On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant N boules dont a blanches et b noires. Il y a une proportion $p \in]0,1[$ de boules blanches et $q = 1-p$ de boules noires.
On effectue des tirages successifs et sans remise dans l'urne, jusqu'à ce qu'une boule blanche soit selectionnée. On note X le nombre de tentatives effectuées.

Déterminez la loi de X

Solution ▽
Soit Ω l'ensemble des suites possibles. $X(\Omega) = [\![1, b+1]\!]$.
Soit $k \in [\![1, b+1]\!]$, on introduit les événements

- N_k "au cours des $k-1$ premiers tirages on n'a obtenu que des boules noires"
- B_k *l'événement* "on a obtenu une boule blanche au $k^{\text{ième}}$ tirage.

Ainsi, $[X = k] = N_k \cap B_k$. En utilisant la probabilité conditionnelle, il en résulte que

$$p([X=k]) = p(N_k) \times p(B_k | N_k)$$

L'avantage de cette probabilité conditionnelle est qu'elle permet de se ramener à une loi hypergéométrique.
En effet N_k est réalisé, si, et seulement si, on effectue $k-1$ tirages et le nombre de boules blanches est nul ! Par conséquent :

$$p(N_k) = \frac{\binom{b}{k-1}}{\binom{a+b}{k-1}}$$

Supposons que N_k soit réalisé : il reste a boules blanches et $b-(k-1)$ noires dans l'urne au moment du $k^{\text{ième}}$ tirage. Le tirage se faisant au hasard :

$$p(B_k | N_k) = \frac{a}{a+b-(k-1)}$$

En utilisant la relation $(a+b-k+1) \times \binom{a+b}{k-1} = k \times \binom{a+b}{k}$, nous obtenons finalement pour tout $k \in [\![1, b+1]\!]$

$$\boxed{\forall k \in [\![1, b+1]\!], \qquad p([X=k]) = \frac{a}{k} \times \frac{\binom{b}{k-1}}{\binom{a+b}{k}}}$$

▲

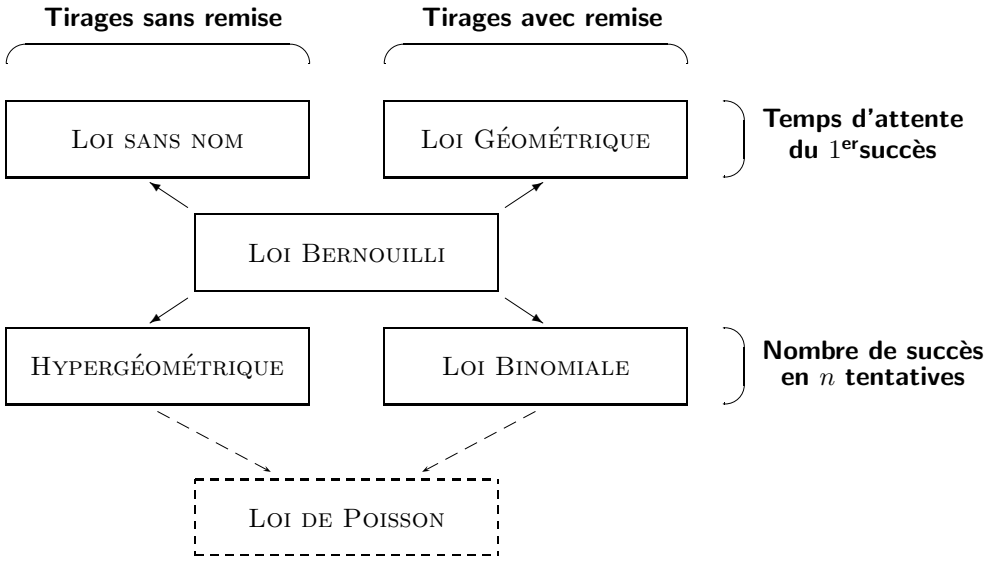
V How To

Comment calculer l'espérance et la variance d'une v.a.r.

- vous connaissez les espérances et variances des lois usuelles, rappelées dans le tableau page suivante.
- vous pouvez utiliser les **Théorèmes 31.11 et 31.14**.
- ces théorèmes seront complétés lors du **Chapitre Couples de variables aléatoires discrètes**

Comment choisir le bon modèle

Si vous vous posez la question, c'est qu'il s'agit d'une loi liée au schéma *succès-échec*. En ce cas, reportez-vous à l'organigramme suivant :



0.c Choix d'un modèle

Comme nous l'avons déjà souligné au **Chapitre 16**, ce choix se fonde principalement sur une famille d'événements distingués dans l'énoncé ou qui apparaissent de façon naturelle. Il est important de bien identifier ces événements, en prenant des notations adaptées.
En revanche la tribu qui équipe Ω est rarement précisée par l'énoncé. Lorsque vous étudiez une variable aléatoire X, la tribu $\mathcal{A}_X$, engendrée par la famille $\big([X=x]\big)_{x\in X(\Omega)}$ est souvent le bon choix. En ce cas, la conditions de mesurabilité est gratuiite...

0.d Espérance d'une v.a.r.

L'espérance d'une v.a.r. X s'interprète comme la *valeur moyennne* de X, et ce même dans le cas discret. Rappelez-vous qu'il s'agit de la limite quand n tend vers $+\infty$ du gain moyen en n tentatives dans l'**Expérience 1bis**.
Du point de vue du calcul, montrer que X possède une espérance c'est

1. montrer que la série des valeurs absolues $\sum |x_n|\, p\big([X=x_n]\big)$ converge.
Pour cela, comme il s'agit d'une série à termes positifs vous pouvez :
- utiliser un *télescopage*,
- utiliser les séries de référence,
  - *via* des opérations algébriques
  - *via* un théorème de comparaison
  - *via* la règle des équivalents.

TABLE 30.1 – TABLEAU RÉCAPITULATIF DES LOIS DISCRÈTES USUELLES

Nom	Notation	Paramètres	Valeurs	Loi de probabilité	Espérance	Variance
Loi uniforme	$\mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$	$n \in \mathbf{N}^\star$	$X(\Omega) = \llbracket 1,n \rrbracket$	$p([X=k]) = 1/n$	$E(X) = \dfrac{n+1}{2}$	$V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$
Loi de Bernouilli	$\mathcal{B}(1,p)$	$p \in [0,1]$	$X(\Omega) = \{0,1\}$	$p([X=1]) = p$ $p([X=0]) = q$	$E(X) = p$	$V(X) = p\,q$
Loi hypergéométrique	$\mathcal{H}(N,n,p)$	• $N, n \in \mathbf{N}^\star,\ p \in [0,1]$ • $0 < n \leq N$ • $N\,p \in \mathbf{N}$	$X(\Omega) \subset \llbracket 0,n \rrbracket$	$p([X=k] = \dfrac{\binom{Np}{k} \times \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$E(X) = np$	$V(X) = npq\,\dfrac{N-n}{N-1}$
Loi binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	$n \in \mathbf{N}^\star,\ p \in [0,1]$	$X(\Omega) = \llbracket 0,n \rrbracket$	$p([X=k]) = \binom{n}{k} p^k\,q^{n-k}$	$E(X) = np$	$V(X) = npq$
Loi géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$p \in]0,1[$	$X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$	$p([X=k]) = p\,q^{k-1}$	$E(X) = \dfrac{1}{p}$	$V(X) = \dfrac{q}{p^2}$
Loi de Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda > 0$	$X(\Omega) = \mathbf{N}$	$p([X=k]) = e^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^k}{k!}$	$E(X) = \lambda$	$V(X) = \lambda$

2. calculer ensuite la somme $E(X) = \sum_0^{+\infty} x_n \, p\big([X = x_n]\big)$. Pour cela vous pouvez :
- utiliser un *télescopage*,
- des opérations algébriques sur les séries exponentielles ou géométriques et géométriques dérivées.

0.e Espérance d'une fonction d'une v.a.r.

Pour calculer l'espérance de $Y = g \circ X$, le THÉORÈME DE TRANSFERT est **incontournable** dans la plupart des cas, puisqu'il permet de faire l'économie du calcul de la loi de Y, seule celle de X suffit.

0.f Variance d'une v.a.r. discrète

Comme dans le cas des variables aléatoires finies, la variance mesure la dispersion des valeurs de X autour de sa moyenne, i.e. son espérance.
Pour calculer la variance de X, il faut s'assurer que X possède des moments d'ordre 1 et 2. Dès lors, il est souvent préférable d'utiliser la formule de HUYGENS

$$V(X) = m_2(X) - \big(m_1(X)\big)^2$$

à la définition.