PROGRAMME DE COLLE S08

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

NOTIONS DE BASE

■■■ Logique

Définition : tables de vérité des connecteurs logiques élémentaires —. *conjonction, disjonction, négation, implication et équivalence.*

Proposition.— Propriétés des opérations logiques élémentaires —. commutativité, associativité, distributivités de OU et ET. Négation d'une conjonction, d'une disjonction…

Définition : Quantificateurs —. *Les propriétés d'un ensemble E sont de l'un des deux types suivants :*
Type Existentiel : *Il existe (au moins) un élément x de E vérifiant P. On note* $(\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E})\ \ \boldsymbol{P(x)}$
Type Universel : *Tous les éléments x de E vérifient P. On note* $(\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E})\ \ \boldsymbol{P(x)}$

Proposition*.— Règles de calcul pour les quantificateurs —.

$$\boxed{\begin{array}{lcl} non\ \big(\exists x \in E;\ \ P(x)\big) & \Longleftrightarrow & \big(\forall x \in E;\ \ non\ P(x)\big) \\ non\ \big(\forall x \in E;\ \ P(x)\big) & \Longleftrightarrow & \big(\exists x \in E;\ \ non\ P(x)\big) \\ \forall x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x,y) & \Longleftrightarrow & \forall y \in F,\ \forall x \in E\ , P(x,y) \\ \exists x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y) & \Longleftrightarrow & \exists y \in F,\ \exists x \in E\ , P(x,y) \end{array}}$$

Savoir-faire : prendre la négation d'une assertion quantifiée.

Proposition.— Stratégies pour une implication —. Soit P et Q des assertions. Les ASSE

$$\Updownarrow \begin{array}{l} \bullet\ \ P \Rightarrow Q \\ \bullet\ \ non\, P\ ou\ Q \\ \bullet\ \ non\, Q \Rightarrow non\, P \\ \bullet\ \ non\big[P\ et\ non\, Q\big]. \end{array}$$

Savoir-faire : démonstration par contraposée, démonstration par l'absurde

■■■ Ensembles

Définition : Opérations élémentaires dans $\mathscr{P}(E)$—. *Soit E un ensemble, $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, on définit*

1. $A \cup B = \{x \in E |\ x \in A\ ou\ x \in B\}$, *la* ***réunion*** *de A et B.*
2. $A \cap B = \{x \in E |\ x \in A\ et\ x \in B\}$, *l'****intersection*** *de A et B.*
3. $\complement_E A = \{x \in E |\ x \notin A\}$, *le* ***complémentaire*** *de A dans E.*
4. $A \setminus B = \{x \in E |\ x \in A\ et\ x \notin B\}$, *la* ***différence*** *de A et B.*

Proposition*.— Liens avec les opérations logiques élémentaires —. Soit E un ensemble, $P, Q : E \to \{V, F\}$ des propriétés que peuvent ou non posséder les éléments de E. Alors

$$\begin{array}{rcl} \complement_E\{x \in E |\ P(x)\} & = & \{x \in E |\ (nonP)(x)\} \\ \{x \in E |\ P(x)\} \cup \{x \in E |\ Q(x)\} & = & \{x \in E |\ P(x)\ ou\ Q(x)\} \\ \{x \in E |\ P(x)\} \cap \{x \in E |\ Q(x)\} & = & \{x \in E |\ P(x)\ et\ Q(x)\} \end{array}$$

Proposition*.— Distributivités —. Soit A, B, C des parties d'un ensemble E.

1. L'intersection est distributive sur la réunion : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2. La réunion est distributive sur l'intersection : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Proposition.— Caractérisation du complémentaire —. Soit A et B des parties d'un ensemble E,

$$B = \complement_E A \text{ si et seulement si } \begin{array}{l} \bullet\ \ A \cup B = E \\ \bullet\ \ A \cap B = \emptyset \end{array}.$$

Proposition.— Propriétés du passage au complémentaire —. Soit A, B deux parties d'un ensemble E

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \complement_E(A\cup B) & = & (\complement_E A)\cap(\complement_E B) \\ \complement_E(A\cap B) & = & (\complement_E A)\cup(\complement_E B) \end{array}}$$

Définition : Fonction indicatrice d'une partie —. *Soit E un ensemble et $A \in \mathscr{P}(E)$ une partie de E. La fonction **indicatrice** de A est l'application de E vers $\{0,1\}$, notée $\mathbb{1}_A : E \to \{0;1\}$ qui à tout élément x de E associe*

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}.$$

Théorème.— Soit E un ensemble, A et B deux parties de E, alors :

$$\boxed{A = B \text{ si et seulement si } \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B}$$

Proposition.— Règles de calcul pour les indicatrices —. Soit A et B des parties d'un ensemble E. Les fonctions indicatrices de $\complement_E A$, $A\cup B$, $A\cap B$ et $A\setminus B$ sont données par ;

1. $\mathbb{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbb{1}_A$
2. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A\, \mathbb{1}_B$
3. $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A\,(1-\mathbb{1}_B)$
4. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\, \mathbb{1}_B$

Définition : Produit cartésien —. *Soit E, F deux ensembles, le **produit cartésien** de E et F est l'ensemble défini par $E\times F = \{(x,y)\,;\ x\in E, y\in F\}$. L'égalité de deux couples (x,y) et (x',y') est décaféinie par :*

$$(x,y) = (x',y') \text{ si et seulement si } \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

▪▪▪ Applications

Définition : *Une application $f : E \to F$ est dite :*

1. ***injective** si $\big(\forall (x,x') \in E\times E\big)$, $\big((f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')\big)$.*
2. ***surjective** si $(\forall y \in F)$, $(\exists x \in E)$; $y = f(x)$.*
3. ***bijective** si elle est à la fois injective et surjective.*

Proposition.— Composition et injectivité, surjectivité —. Soit $f : E\to F$, $g : F \to G$ deux applications.

- **Si** f et g sont injectives, **alors** $g\circ f$ est injective
- **Si** f et g sont surjectives, **alors** $g\circ f$ est surjective.
- **Si** $g\circ f$ est injective, **alors** f est injective,
- **Si** $g\circ f$ est surjective, **alors** g est surjective.

Proposition*.— point de vue équations —. Soit $f : E\to F$ une application.

f est bijective *si et seulement si* pour tout $b\in F$, l'équation $f(x) = b$ admet une unique solution dans E.

Définition : Application réciproque d'une bijection —. *Soit $f : E \to F$ une **bijection**. On définit une nouvelle application $f^{-1} : F\to E$, appelée **application réciproque** de f, par*

$$\text{Pour tout couple } (x,y), \quad \begin{cases} y\in F \\ x = f^{-1}(y) \end{cases} \text{ si et seulement si } \begin{cases} x \in E \\ y = f(x) \end{cases}$$

Théorème.— Caractérisation de l'application réciproque –. Soit $f : E\to F$ une application.

f est bijective *si et seulement si* il existe une application $g : F \to G$ telle que
- $f\circ g = id_F$
- $g\circ f = id_E$

En ce cas, $g = f^{-1}$ est l'application réciproque de f.

Proposition.— Composée de bijections —. Soit $f : E\to F$ et $g : F\to G$ deux applications.

Si f et g sont bijectives, **alors** la composée $g\circ f$ est bijective, et $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$

Définition : image directe et image réciproque d'une partie —. *Soit $f : E\to F$ une application, $A\subset E$, $B\subset F$, on définit :*

- *l'**image directe** de A par f comme la partie de F : $f(A) = \{f(x)\,;\ x\in A\} = \{y\in F \mid \exists x\in A; y = f(x)\}$*
- *l'**image réciproque** de B par f, comme la partie de E : $\overset{-1}{f}(B) = \{x\in E \mid f(x)\in B\}$.*