# PROGRAMME DE COLLE S14

**NB : seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

## DÉRIVATION(1/2)

### ■■■ Dérivabilité

**Définition :** *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur $I$ et $a \in I$. $f$ est **dérivable** au point $a$ si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie au point $a$. En ce cas, on note $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. On dit que $f$ est **dérivable sur** $I$ si $f$ est dérivable en tout point de $I$.*

**Interprétation géométrique**

**Théorème.— Développement limité à l'ordre 1 des fonctions dérivables —.** soit $f : I \to \mathbf{R}$ et $a \in I$.

$$f \text{ est dérivable au point } a \textit{ ssi } \text{il existe } d \in \mathbf{R} \text{ tel que } f(x) = f(a) + d\cdot(x-a) + o_a(x-a)$$

En ce cas, $f'(a) = d$.

**Théorème.— Si** $f : I \to \mathbf{R}$ est dérivable au point $a \in I$, **alors** $f$ est continue au point $a$.

**Corollaire*.— Si** $f : I \to \mathbf{R}$ est dérivable au point $a \in I$, et $f'(a) \neq 0$, **alors**

$$f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$$

**Proposition.— Opérations algébriques sur les fonctions dérivables —.** Soit $(f,g) \in \mathscr{F}(I,\mathbf{R})^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$. On suppose que $f$ et $g$ sont dérivables en $a \in I$. Alors

- la fonction $\lambda\cdot f + \mu\cdot g$ est dérivable en $a$ et $(\lambda\cdot f + \mu\cdot g)'(a) = \lambda\cdot f'(a) + \mu\cdot g'(a)$
- la fonction $f\times g$ est dérivable en $a$ et $(f\times g)'(a) = f'(a)\times g(a) + f(a)\times g'(a)$
- si $g(a)\neq 0$, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en $a$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)\times g(a) - f(a)\times g'(a)}{g(a)^2}$

**Proposition*.— Règle de dérivation en chaîne —.** Soit $g \in \mathscr{F}(J,\mathbf{R})$ et $f \in \mathscr{F}(I,\mathbf{R})$, telles que $f(I) \subset J$. Si $f$ est dérivable en $a \in I$ et $g$ est dérivable en $b = f(a)$, alors la fonction $g\circ f$ est dérivable en $a$ et

$$(g\circ f)'(a) = g'(b)\times f'(a) = g'\circ f(a)\times f'(a)$$

**Proposition*.— Dérivabilité de l'application réciproque d'une bijection —.** Soit $f : I \to J$ une bijection continue de l'intervalle $I$ sur l'intervalle $J$. Si $f$ est dérivable en $a \in I$ , et si $f'(a)\neq 0$, alors la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est dérivable en $b = f(a)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\circ f^{-1}(b)}$$

### ■■■ Dérivées $n^{\text{ièmes}}$

**Définition :** *Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbf{R})$, on définit par récurrence les **dérivées d'ordre 0,1,2,...,n,...** de $f$ lorsqu'elles existent par :*

- $f^{(0)} = f$
- *Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, si $f^{(n)}$ existe et est dérivable dans $I$, on pose $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$*

**Savoir-faire :** déterminer l'expression de la dérivée $n^{\text{ième}}$ en calculant les premières dérivées puis à l'aide d'une récurrence.

**Vocabulaire :** *si $f$ admet une dérivée $n^{ième}$, on dit que $f$ est $n$* ***fois dérivable****. Lorsque $f$ admet des dérivées de tout ordre sur $I$, on dit que $f$ est* ***indéfiniment dérivable****. On note pour tout $n \in \mathbf{N}$,*

- $\mathcal{D}^n(I, \mathbf{R})$ *l'ensemble des fonctions $n$ fois dérivables sur $I$.*
- $\mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$ *l'ensemble des fonctions $n$ fois dérivables et de dérivée $n^{ième}$ continue sur $I$.*
- $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{R})$ *l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur $I$.*

**Théorème*.— Opérations algébriques sur les fonctions $n$ fois dérivables**

- une combinaison linéaire de fonctions $n$ fois dérivables dans $I$ (*resp.* de classe $\mathcal{C}^n$) l'est aussi,
- le produit de fonctions $n$ fois dérivables dans $I$ (*resp.* de classe $\mathcal{C}^n$) l'est aussi,
- le quotient de fonctions $n$ fois dérivables dans $I$ (*resp.* de classe $\mathcal{C}^n$) l'est aussi, pourvu que le dénominateur ne s'annule pas
- la composée de fonctions $n$ fois dérivables (*resp.* de classe $\mathcal{C}^n$) l'est aussi
- l'application réciproque d'une bijection $f : I \to J$, $n$ fois dérivable (*resp.* de classe $\mathcal{C}^n$) l'est aussi, pourvu que $f'$ ne s'annule pas dans $I$.

**Théorème*.— Formule de Leibniz —.** Soit $f, g \in \mathcal{D}^n(I, \mathbf{R})$ (*resp.* de classe $\mathcal{C}^n$). Alors $f \times g \in \mathcal{D}^n(I, \mathbf{R})$ (*resp.* de classe $\mathcal{C}^n$) et,

$$\left(f \times g\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$$

## ■■■ Dérivées des fonctions usuelles

**Théorème*.—** En notant $p_\alpha$ la fonction puissance $\alpha^{\text{ième}}$ ($x \mapsto x^\alpha$), nous avons :

| Dérivée | Intervalle | paramètres |
|---|---|---|
| $\exp'(x) = e^x$ | $x \in \mathbf{R}$ | |
| $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ | $x \in \mathbf{R}^{+\star}$ | |
| $p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ | $x \in ]0, +\infty[$ | $\alpha \in \mathbf{R}$ |
| $\sin'(x) = \cos(x)$ | $x \in \mathbf{R}$ | |
| $\cos'(x) = -\sin(x)$ | $x \in \mathbf{R}$ | |
| $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ | $x \in ]-\pi/2 + k\pi; \pi/2 + k\pi[$ | $k \in \mathbf{Z}$ |
| $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$ | $x \in \mathbf{R}$ | |
| $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$ | $x \in \mathbf{R}$ | |
| $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$ | $x \in \mathbf{R}$ | |
| $\mathrm{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $x \in ]-1, 1[$ | |
| $\mathrm{Arccos}'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $x \in ]-1, 1[$ | |
| $\mathrm{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ | $x \in \mathbf{R}$ | |