Chapitre 17

Développements asymptotiques

Sommaire

OBJECTIFS

- ▷ connaître les développements limités de fonctions usuelles en 0;
- ▷ calculer un développement limité d'une suite ou d'une fonction à partir des développements limités usuels ;
- ▷ utiliser un développement limité pour calculer limite ou équivalent d'une suite ou d'une fonction ;
- ▷ utiliser un développement limité pour obtenir la position d'une courbe par rapport à une tangente ou une asymptote oblique ;
- ▷ utiliser un développement limité pour obtenir un développement asymptotique d'une suite.

I Formule de Taylor-Young

1 Polynômes de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$

Définition : *Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$ et $a \in I$. On appelle* ***polynôme de Taylor*** *de f en a de degré inférieur ou égal à n, le polynôme T_n défini par :*

$$\boxed{\begin{aligned} T_n(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \end{aligned}}$$

Exemples : Les fonctions exp et sin sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur **R**. Elles admettent donc des polynômes de **Taylor** de tous ordres.

1. Déterminons le polynôme de **Taylor** à l'ordre n de la fonction exp en 0.
Comme pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, $\exp^{(k)}(0) = e^0 = 1$, il vient

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

2. Déterminons les polynômes de **Taylor** de la fonction sin en 0.
Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, $\sin^{(k)}(x) = \sin(x + k\frac{\pi}{2})$, par conséquent les dérivées successives de sin en 0 sont données par

$$\sin^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 4\ell \\ 1 & \text{si } k = 4\ell + 1 \\ 0 & \text{si } k = 4\ell + 2 \\ -1 & \text{si } k = 4\ell + 3 \end{cases}$$

Il en résulte que

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Exercice : Déterminez le polynôme de **Taylor** à l'ordre n de la fonction $\ln(1+x)$ en 0.

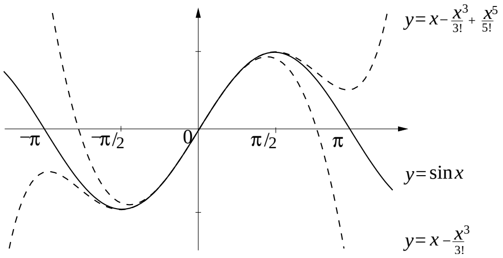
Remarque : D'après la formule de **Taylor** pour les polynômes (**Théorème** 15.20), nous savons que **si** $f \in \mathbf{R}_n[x]$ *est* une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n, **alors** pour tout point a de I,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Autrement dit, f coïncide avec son polynôme de **Taylor** d'ordre n.

Cette simple remarque justifie que le polynôme de **Taylor** de f en a est un bon candidat pour approcher la fonction $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$. Toutefois, lorsque f n'est pas polynomiale, elle ne coïncide pas exactement avec son polynôme de **Taylor** : il y a un reste !

Illustration : ses polynômes de Taylor approchent la fonction sin



2 Formule de Taylor-Young

Théorème 17.1.— Formule de Taylor-Young —. Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier naturel et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant a. Alors

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x \to a}{o}\big((x-a)^n\big)}$$

Remarques :

- lorsque $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$, *i.e.* $n = 0$, nous retrouvons la définition de fonction continue au point a,
- lorsque $n = 1$, nous retrouvons la caractérisation de la dérivabilité au point a à l'aide des développements limités à l'ordre 1 :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x \to a}{o}(x-a)$$

Démonstration ▽

Nous démontrerons cette formule au **Chapitre 25**. ▲

II Développements limités

Les développements limités constituent l'outil le plus puissant pour l'étude locale des fonctions. Ils généralisent les équivalents et permettent en pratique de lever toutes les indéterminations dans le calcul de limites.

Par exemple, pour l'étude au voisinage de 0 de la fonction

$$x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - 1 - (1/2)x}{x^2},$$

l'équivalent usuel $\sqrt{1+x} - 1 \sim_0 x/2$ permet de montrer que nous sommes en présence d'une forme indéterminée "0/0", mais ne fournit aucune indication de réponse quant à l'existence –et la valeur le cas échéant– de cette limite.

L'utilisation d'un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $\sqrt{1+x}$ permet de *lever* facilement cette *indétermination* comme nous le verrons bientôt.

1 Généralités

1.a Développement limité à l'ordre n de f en a

Définition : *Soit* $f : I \to \mathbf{R}$ *et* $n \in \mathbf{N}$. *On dit que* f *admet un* ***développement limité à l'ordre*** n *en un point* $a \in I$ *s'il existe un polynôme* $P \in \mathbf{R}_n[X]$ *de degré inférieur ou égal à* n *tel que*

$$\boxed{(DL_n(a)) \qquad f(x) = P(x-a) + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)^n\big)}$$

Commentaires : en clair, dire que f possède un développement limité à l'ordre n en a signifie qu'il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ tels que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = a_0 + a_1\,(x-a) + a_2\,(x-a)^2 + \cdots + a_n\,(x-a)^n + (x-a)^n\,\varepsilon(x-a),$$

où $\varepsilon \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R})$ vérifie, $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

En pratique : le changement de variable $x = a + t$ permet de se ramener à un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(a+t) = a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + \cdots + a_n\,t^n + t^n\,\varepsilon(t),$$

Exemples : si f est continue au point a, elle admet un développement limité à l'ordre 0 au point a :

$$f(x) = f(a) + o(1).$$

Si f est dérivable au point a, elle admet un développement limité à l'ordre 1 en ce point :

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \underset{a}{o}\big((x-a)\big).$$

1.b Développement limité de Taylor-Young

Le plus souvent, les développements limités peuvent être obtenus par la **Formule de Taylor-Young** :

Théorème 17.2.— Développement de Taylor-Young —. Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier naturel et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant a. Alors f possède un développement limité à l'ordre n au point a :

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)^n\big)}$$

Exercice : Déterminez un développement limité à l'ordre 3 de la fonction Arctan au voisinage de 0.

Solution $\triangledown$

Notons pour $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{Arctan} x$. f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbf{R}$, *elle admet donc un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de* 0.

$$\begin{array}{rrcllrcl}
\forall x \in \mathbf{R}, & f(x) & = & \operatorname{Arctan} x & \rightsquigarrow & f(0) & = & 0 \\
& f'(x) & = & \dfrac{1}{1+x^2} & \rightsquigarrow & f'(0) & = & 1 \\
& f''(x) & = & -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} & \rightsquigarrow & f''(0) & = & 0 \\
& f^{(3)}(x) & = & -2\dfrac{1-3x^2}{(1+x^2)^3} & \rightsquigarrow & f^{(3)}(0) & = & -2
\end{array}$$

D'après la **formule de Taylor-Young** $f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f^{(3)}(0)}{}x^3 + o(x^3)$. *Avec les résultats ci-dessus, il en résulte que*

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

▲

2 Propriétés

2.a Unicité des développements limités

Théorème 17.3.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction possédant un développement limité d'ordre n au voisinage de a :

$$f(x) = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \cdots + a_n (x-a)^n + o\big((x-a)^n\big).$$

$$\boxed{\text{Les coefficients } a_0, a_1, \ldots, a_n \text{ sont alors uniquement déterminés.}}$$

En pratique : comme pour une égalité polynomiale, on pourra identifier les coefficients entre développements limités.

Démonstration ▽

Supposons –sans perte de généralité– que $a = 0$. Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ et $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$ tels que

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + o(t^n) \\ f(t) &= b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n + o(t^n) \end{aligned}$$

En particulier, si $P \in \mathbf{R}_n[t]$ désigne la fonction polynomiale

$$P(t) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)t + + \cdots + (a_n - b_n)t^n,$$

elle vérifie $P(t) = o(t^n)$. Montrons *par l'absurde* que P est identiquement nulle.

Sinon, il existe un plus petit entier $k \leq n$ tel que $(a_k - b_k) \neq 0$. En ce cas, au voisinage de 0, $P \sim (a_k - b_k)t^k$. Il en résulte que

$$(a_k - b_k)t^k = o(t^n),$$

ce qui est *absurde*. ▲

2.b Troncature des développements limités

Grâce à l'unicité de la partie régulière du développement limité, nous obtenons le :

Corollaire 17.4.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en un point a de I :

$$f(x) = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \cdots + a_n (x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)^n\big).$$

Alors pour tout entier naturel p inférieur ou égal à n, f possède comme développement limité à l'ordre p en a :

$$f(x) = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \cdots + a_p (x-a)^p + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)^p\big).$$

2.c Régularité d'une fonction admettant un $(DL_n f)_a$

Corollaire 17.5.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction admettant un développement limité à l'ordre $n \in \mathbf{N}$ en un point a de I :

$$f(x) = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \cdots + a_n (x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)^n\big).$$

- Si $n \geq 0$, alors f est continue au point a et $f(a) = a_0$.
- Si $n \geq 1$, alors f est de plus dérivable au point a et $f'(a) = a_1$.

Remarques :

1. En particulier, si f admet pour développement limité à l'ordre 1 $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + o(x^2)$, alors la courbe représentative de f admet pour tangente au point d'abscisse a la droite d'équation $y = a_0 + a_1(x-a)$.
2. En revanche, si f admet un développement limité à l'ordre $n \geq 2$, elle n'est pas nécessairement deux fois dérivable au point a comme le montre l'exercice qui suit.

Exercice : Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrez que $f(x) = o(x^2)$.

2. En déduire que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, puis que f est continue et dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?

3. Montrez que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

4. Conclure.

Solution ▽

1. *Soit* $x \in \mathbf{R}^\star$*, on a* $|x^3 \sin(1/x)| \leq |x^3|$*. En particulier,* $f(x) = o(x^2)$.

2. *Comme* $f(x) = 0 + o(x^2)$*,* f *possède un* $DL_2(0)$*. Il s'ensuit que* f *est continue et dérivable en* 0 *et que* $f(0) = f'(0) = 0$.

3. *En revanche,* f *n'est pas deux fois dérivable en* 0*. En effet, pour tout* $x \in \mathbf{R}^\star$*,* $f'(x) = 3x^2 \sin(1/x) - x\cos(1/x)$ *de sorte que*

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 3x\sin(1/x) - \cos(1/x)$$

Comme $\cos(1/x)$ *n'admet pas de limite en* 0*, il s'ensuit que* f *n'est pas deux fois dérivable en* 0.

4. *Si* $n \geq 2$*, l'existence d'un développement limité à l'ordre* n *au vois de* a *n'entraîne pas que* f *est* n *fois dérivable au point* a. ▲

2.d Développement limité d'une fonction paire

Corollaire 17.6.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine admettant un développement limité d'ordre n en 0,

$$f(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n + o\big(x^n\big).$$

- Si f est **paire**, alors $0 = a_1 = a_3 = \cdots$
- Si f est **impaire**, alors $0 = a_0 = a_2 = \cdots$

Commentaires : les développements limités d'une fonction paire (*resp.* impaire) ne contiennent que des monômes de degré pairs (*resp.* impairs).

Démonstration ▽
Comme I est symétrique par rapport à l'origine, nous pouvons écrire les développements limités à l'ordre n en l'origine pour x et $-x$. Il vient :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + a_4\, x^4 + \cdots + a_n\, x^n + o\big(x^n\big) \\ f(-x) & = & a_0 - a_1\, x + a_2\, x^2 - a_3\, x^3 + a_4\, x^4 - \cdots + (-1)^n a_n\, x^n + o\big(x^n\big) \end{array}$$

- Si f est paire, nous avons de plus $f(x) = f(-x)$. Par unicité du développement limité d'ordre n à l'origine, nous pouvons identifier les coefficients. Il en résulte que $a_1 = -a_1$, $a_3 = -a_3$, … D'où il découle $0 = a_1 = a_3 = \cdots$.
- Si f est impaire, nous avons de plus $f(x) = -f(-x)$. Par unicité du développement limité d'ordre n à l'origine il en résulte comme précédemment que $a_0 = -a_0$, $a_2 = -a_2$, $a_4 = -a_4$,… par suite $0 = a_0 = a_2 = a_4 = \cdots$

▲

3 Développements limités des fonctions usuelles

Les fonctions $\exp, \sin, \cos, (1+x)^\alpha, \ln(1+x)$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs intervalles respectifs de définition, il découle directement de la **Formule de Taylor-Young** le

Théorème 17.7.— Développements limités des fonctions usuelles ❤
Au voisinage de l'origine, les fonctions usuelles admettent des développements limités de tous ordres :

$$
\begin{array}{rcl}
e^x & = & 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n) \\
\cos(x) & = & 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\dfrac{x^8}{8!}-\cdots(-1)^n\,\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n}) \\
\sin(x) & = & x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\,\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1}) \\
\alpha\in\mathbf{R},\quad (1+x)^\alpha & = & 1+\alpha\,x+\alpha\,(\alpha-1)\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n) \\
\dfrac{1}{1-x} & = & 1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n+o(x^n) \\
\dfrac{1}{1+x} & = & 1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n) \\
\ln(1+x) & = & x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\,\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)
\end{array}
$$

Remarque : Pour retenir les développements limités des fonctions usuelles à l'origine, vous pouvez remarquer que :

1. le développement limité à l'ordre n de l'exponentielle est la somme partielle de rang n de la série du même nom plus le reste $o(x^n)$,
2. le développement limité à l'ordre 2 du cos est déjà connu (équivalents usuels) ou bien pensez à $\cos x = \mathfrak{Re}\, e^{ix}$,
3. le développement limité à l'ordre 1 du sin est déjà connu (équivalents usuels) ou bien pensez à $\sin x = \mathfrak{Im}\, e^{ix}$,
4. lorsque α est une entier naturel, le développement limité à l'ordre α de $(1+x)^\alpha$ est simplement le développement par la formule du binôme de **Newton** :

$$\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}=\binom{\alpha}{k}$$

Démonstration ▽
Les fonctions $\exp, \sin, \cos, (1+x)^\alpha, \ln(1+x)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. De plus on démontre par récurrence que

$$
\begin{array}{rcl}
\exp^{(k)}(x) & = & \exp(x) \\
\cos^{(k)}(x) & = & \cos(x+k\pi/2) \\
\sin^{(k)}(x) & = & \sin(x+k\pi/2) \\
\big[(1+x)^\alpha\big]^{(k)} & = & \alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \\
\big[\ln(1+x)\big]^{(k)} & = & (-1)^{k-1}(k-1)!\dfrac{1}{(1+x)^k}.
\end{array}
$$

On vérifie alors aisément que les développements de **Taylor-Young** de ces fonctions donnent les résultats annoncés. ▲

4 Opérations sur les développements limités

Pour obtenir $(DL_n f)_a$, on peut presque toujours utiliser une formule de Taylor ($f \in \mathcal{C}^n$). Cependant, il est souvent plus rapide en pratique de procéder par opérations à partir de développements limités des fonctions usuelles.

Dans les prochains paragraphes, on étudie les opérations sur des **développements limités à l'origine**. Le cas général des développements limités en un point a quelconque s'en déduit grâce au changement de variable $x = a + t$.

4.a Développement limité d'une somme (d'une C-L)

Théorème 17.8.— Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I contenant 0 admettant des développements limités à l'ordre n en 0. Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, la fonctions $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.

De plus, si les développements limités à l'ordre n de f et g en 0 sont donnés par :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & P(x) + o\left(x^n\right) \\ g(x) & = & Q(x) + o\left(x^n\right) \end{array}$$

Alors

$$\boxed{(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda P + \mu Q)(x) + o\left(x^n\right)}$$

Exemple : Les fonctions $\exp(x)$ et $\exp(-x)$ admettent des développements limités de tous ordre au voisinage de 0. Comme $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ et $\operatorname{sh} x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, nous en déduuisons aisément :

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{ch}(x) & = & 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \operatorname{sh}(x) & = & x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \end{array}$$

4.b Développement limité d'un produit

Théorème 17.9.— Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I contenant 0 admettant des développements limités à l'ordre n en 0. Alors $f \times g$ admet un développement limité d'ordre n à l'origine.

De plus, si les développements limités à l'ordre n de f et g en 0 sont donnés par :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & P(x) + o\left(x^n\right) \\ g(x) & = & Q(x) + o\left(x^n\right) \end{array}$$

Alors

$$\boxed{(f \times g)(x) = R(x) + o\left(x^n\right)}$$

où $R \in \mathbf{R}_n[X]$ est le polynôme produit $P \times Q$ *tronqué* à l'ordre n.

Pour obtenir un développement limité à l'ordre 4 de du produit $f \times g$ vous devez d'abord déterminer les développements limités à l'ordre 4 de f et g. Ensuite, vous *tronquez*.

Exercice : Donner un développement limité au voisinage de l'origine de la fonction :

1. $x \mapsto \sqrt{1+x} \times \cos x$ à l'ordre 2,
2. $x \mapsto \dfrac{e^x}{1-x}$ à l'ordre 4,
3. $x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ à l'ordre 6.

Solution ▽

1. *Commençons par écrire un développement limité à l'ordre 2 de chacun des facteurs :*

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\\ \cos x &= 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

Effectuons le produit des parties régulières et tronquons à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x}\times\cos x &= \left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2\right)\times\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)+o(x^2)\\ &= 1+\frac{1}{2}x+(-\frac{1}{2}-\frac{1}{8})x^2+o(x^2)\\ &= 1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2+o(x^2).\end{aligned}$$

2. *suivant la même méthode, nous obtenons tout d'abord*

$$\begin{aligned}e^x &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\\ \frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{1-x} &= \left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)\times\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4\right)+o(x^4)\\ &= 1+(1+1)x+(\frac{1}{2}+1+1)x^2+(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+1+1)x^3+(\frac{1}{24}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+1+1)x^4+o(x^4)\\ &= 1+2x+\frac{5}{2}x^2+\frac{8}{3}x^3+\frac{65}{24}x^4+o(x^4).\end{aligned}$$

3. *La même méthode que précédemment s'applique ici. Toutefois, on peut remarquer que*

$$\frac{1-x}{1+x}=\frac{-1-x+2}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}$$

Comme $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+o(x^6)$, *il vient*

$$\frac{1-x}{1+x}=1+2\,x+2\,x^2+2\,x^3+2\,x^4+2\,x^5+2\,x^6+o(x^6).$$

▲

4.c Développement limité d'une fonction composée❤

Théorème 17.10.— Soit $f : J \to \mathbf{R}$ et $u : I \to J$ deux fonctions définies sur des intervalles contenant 0, et $n \in \mathbf{N}$.
On suppose que $\boldsymbol{u(0)=0}$ (ou que $\boldsymbol{u(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0}$) et que f et u possèdent des développements limités à l'ordre n en 0. Alors $f\circ u$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.
De plus, si les développements limités à l'ordre n de f et u en 0 sont donnés par :

$$\begin{aligned}f(u) &= P(u)+o\left(u^n\right)\\ u(x) &= Q(x)+o\left(x^n\right)\end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{(f\circ u)(x)=R(x)+o\left(x^n\right)}$$

où $R\in\mathbf{R}_n[X]$ est le polynôme $P\circ Q$ *tronqué* à l'ordre n.

Remarque : dans le cas où u n'est pas définie en 0, on remplacera l'hypothèse $u(0)=0$ par $u(x)\xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Démonstration ▽

▶ Si $n = 0$, on a d'après le **théorème de composition des limites**

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \quad u(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\ \bullet \quad f(u) \xrightarrow[u\to 0]{} a_0\end{array}\right) \Rightarrow f\circ u(x) \xrightarrow[x\to 0]{} a_0$$

▶ Si $n \in \mathbf{N}^\star$, comme f admet un $DL_n(0)$, on a

$$\forall u \in J,\ f(u) = P(u) + o(u^n) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots + a_n^n + o(u^n)$$

Comme $u : I \to J$, on peut appliquer cette égalité fonctionnelle en $u(x)$, il vient

$$\forall x \in I,\ f\circ u(x) = a_0 + a_1 u(x) + a_2 u^2(x) + \cdots + a_n u^n(x) + o(u^n(x)) \qquad (17.1)$$

Pour conclure, nous allons montrer que l'on peut remplacer

- les puissances de $u(x)$ par les puissances de $Q(x)$,
- les puissances dans $o(u^n(x))$ par $o(x^n)$

les erreurs commises dans ces simplifications étant toutes négligeables devant x^n.

On sait que $u(x) = Q(x) + o\big(x^n\big)$, d'où l'on tire pour $k \in [\![0, n]\!]$, $u^k(x) = Q^k(x) + o\big(x^n\big)$.
D'autre part, l'hypothèse $u(0) = 0$ entraîne par unicité du développement limité de u au voisinage de l'origine que $Q(0) = 0$ et par suite $u(x) = \mathcal{O}(x)$. Il s'ensuit que $u^n(x) = \mathcal{O}(x^n)$ et $o(u^n(x) = o(x^n)$.
Finalement, (17.1) s'écrit

$$\begin{aligned} f\circ u(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left[u(x)\right]^k + o\left(\left[u(x)\right]^n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left[Q(x)\right]^k + o\left(x^n\right) \\ &= P\circ Q(x) + o\left(x^n\right) = R(x) + o\left(x^n\right) \end{aligned}$$

▲

En pratique : pour obtenir le développement limité d'une fonction composée, vous présentez le calcul comme un changement de variable.

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \quad u(x) = \cdots \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\ \bullet \quad f(u) = P(u) + o(u^n)\end{array}\right) \Rightarrow f\circ u(x) = P\big(u(x)\big) + o(x^n)$$

Vous déterminez alors un développement limité à l'ordre n des puissances successives de $u(x)$.

Exercice : Donnez le développement limité au voisinage de l'origine de

1. $x \mapsto \sqrt{1+\sin x}$ à l'ordre 3.

2. $x \mapsto \sqrt{1+\cos x}$ à l'ordre 4.

3. $x \mapsto \ln\dfrac{\sin x}{x}$ à l'ordre 4.

Solution ▽

1. *Nous sommes donc dans le cadre d'application du théorème précédent :*

$$\begin{array}{l}\bullet \quad u(x) = \sin x \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\ \bullet \quad \sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{1}{2}u - \dfrac{1}{8}u^2 + \dfrac{1}{16}u^3 + o(u^3)\end{array}$$

Il en résulte

$$\sqrt{1+\sin x} = \sqrt{1+u(x)} = 1 + \frac{1}{2}u(x) - \frac{1}{8}u^2(x) + \frac{1}{16}u^3(x) + o(x^3).$$

Calculons donc les développements limités à l'ordre 3 des puissances successives de $u(x)$. *Il vient :*

$$\begin{array}{r||ccrcllll}
1\times & \bullet & 1 & = & 1 & & & & +o(x^3)\\
\frac{1}{2}\times & \bullet & u(x) & = & & x & & -\frac{x^3}{6} & +o(x^3)\\
-\frac{1}{8}\times & \bullet & u^2(x) & = & & & x^2 & & +o(x^3)\\
\frac{1}{16}\times & \bullet & u^3(x) & = & & & & x^3 & +o(x^3)
\end{array}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\sin x} &= 1+\frac{1}{2}\big(x-\frac{x^3}{6}\big)-\frac{1}{8}\big(x^2\big)+\frac{1}{16}\big(x^3\big)+o(x^3)\\
&= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{48}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

2. *Comme* $\cos x$ *ne tend pas vers* 0 *en* 0, *le théorème ne s'applique pas directement ! Nous devons modifier l'expression proposée.*

Remarquons que $\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2+(\cos x-1)}=\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{2}(\cos x-1)}$ *Effectuons le changement de variable* $u(x)=\frac{1}{2}(\cos x-1)$. *Il vient*

- $u(x)=\frac{1}{2}(\cos x-1)\xrightarrow[x\to 0]{}0$
- $\sqrt{1+u}=1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\frac{1}{16}u^3-\frac{5}{32}u^4+o(u^4)$

Par composition, il s'ensuit que

$$\sqrt{1+u(x)}=1+\frac{1}{2}u(x)-\frac{1}{8}u^2(x)+\frac{1}{16}u^3(x)-\frac{5}{32}u^4(x)+o(x^4)$$

Les puissances successives de $u(x)$ *admettent les développements limités :*

$$\begin{array}{r||ccrclll}
1\times & \bullet & 1 & = & 1 & & & +o(x^4)\\
\frac{1}{2}\times & \bullet & u(x) & = & & -\frac{x^2}{4} & +\frac{x^4}{48} & +o(x^4)\\
-\frac{1}{8}\times & \bullet & u^2(x) & = & & & \frac{x^4}{16} & +o(x^4)\\
\frac{1}{16}\times & \bullet & u^3(x) & = & & & & +o(x^4)\\
-\frac{5}{32}\times & \bullet & u^4(x) & = & & & & +o(x^4)
\end{array}$$

Finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\cos x} &= \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{48}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{x^4}{16}\right)\right)+o(x^4)\\
&= \sqrt{2}\left(1-\frac{x^2}{8}+\frac{x^4}{384}\right)+o(x^4)
\end{aligned}$$

▲

Remarque : Dans l'exercice ci-dessus, il n'était pas nécessaire de développer la fonction " *de gauche*" $u\mapsto\sqrt{1+u}$ jusqu'à l'ordre 4 car $u^3(x)=o(x^4)$ et $u(x)^4=o(x^4)$.

4.d Développement limité d'un quotient

Théorème 17.11.— Soit u une fonction définie sur un intervalle I contenant 0.

On suppose que $\boldsymbol{u(0)=0}$ et que u possède un développement limité à l'ordre n en 0. Alors $\dfrac{1}{1+u}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0. De plus, si le développement limité à l'ordre n de u est donné par :

$$u(x) = P(x) + o\big(x^n\big)$$

Alors

$$\boxed{\frac{1}{1+u(x)} = R(x) + o\big(x^n\big)}$$

où $R \in \mathbf{R}_n[X]$ est le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^k(x)$ *tronqué* à l'ordre n.

Démonstration ▽
Il suffit de composer le développement limité de u avec celui de $f(u) = \dfrac{1}{1+u}$. ▲

Exercice : développement limité au voisinage de l'origine de

1. $x \mapsto \dfrac{1}{1+\sin x}$ à l'ordre 3.
2. $x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4.

Solution ▽

1. *posons* $u(x) = \sin x$. *On a*

- $u(x) = \sin x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
- $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$

Par composition, il vient $\dfrac{1}{1+\sin x} = 1 - u(x) + u^2(x) - u^3(x) + o(x^3)$. *Déterminons les développements limités des puissances de* $\sin x$.

$$\begin{array}{r||llllll}
1\times & 1 & = 1 & & & & +o(x^3) \\
-1\times & u(x) & = & x & & -(1/6)x^3 & +o(x^3) \\
1\times & u^2(x) & = & & x^2 & & +o(x^3) \\
-1\times & u^3(x) & = & & & x^3 & +o(x^3)
\end{array}$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{1+\sin x} = 1 - x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$$

2. *posons* $u(x) = \cos x - 1$. *On a*

- $u(x) = \cos x - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
- $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4)$

Par composition, il vient $\dfrac{1}{\cos x} = 1 - u(x) + u^2(x) - u^3(x) + u^4(x) + o(x^3)$. *Déterminons les développements limités des puissances de* $\sin x$.

$$\begin{array}{r||lllll}
1\times & 1 & = 1 & & & +o(x^4) \\
-1\times & u(x) & = & -(1/2)x^2 & +(1/24)x^4 & +o(x^4) \\
1\times & u^2(x) & = & & (1/4)x^4 & +o(x^4) \\
-1\times & u^3(x) & = & & & +o(x^4) \\
-1\times & u^4(x) & = & & & +o(x^4)
\end{array}$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$$

▲

Corollaire 17.12.— Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I contenant 0 admettant des développements limités à l'ordre n en 0. Si $g(0) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ admet un développement limité d'ordre n à l'origine.

Démonstration ▽
$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0) \neq 0$. Par compatibilité limite et inégalité, il s'ensuit que g ne s'annule pas au voisinage de 0. Par conséquent, $\frac{f}{g}$ est définie au voisinage de 0 et nous pouvons écrire :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(0) + g(x) - g(0)} = \frac{1}{g(0)} \quad \frac{f(x)}{1 + \frac{g(x)-g(0)}{g(0)}}$$

Posons $u(x) = \dfrac{g(x) - g(0)}{g(0)} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. u admet un $DL_n(0)$, donc par composition, $x \mapsto \dfrac{1}{1 + u(x)}$ admet un $DL_n(0)$. Finalement, $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ admet un développement limité par produit. ▲

Exemple : comme $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, on obtient un développement limité à l'ordre 5 de $x \mapsto \tan(x)$ en multipliant le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ par celui de $x \mapsto \sin(x)$:

$$\tan(x) = \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\right) \times \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}x^5 + o(x^5)\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

4.e Développement limité d'une primitive

Théorème 17.13.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur un intervalle I possédant un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

Soit F une primitive de f. Alors F admet pour développement limité à l'ordre $n+1$:

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$$

Commentaires : en clair, pour obtenir un développement limité à l'ordre $n+1$ d'une primitive de f, vous intégrez terme à terme le développement limité à l'ordre n de f **sans oublier** la consatante d'intégration, à savoir $\boldsymbol{F(0)}$.

Démonstration ▽
Comme f est continue sur I, F est de classe $\mathcal{C}^1$. Par conséquent, l'**égalité des accroissements finis** pour F s'écrit

$$\forall x \in I, F(x) - F(0) = \int_0^x f(t)\,dt$$

Soit $\rho(t)$ une fonction continue dans I telle que $\rho(t) = o(t^n)$ et $\forall t \in I,\ f(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k + \rho(t)$. Ainsi,

$$F(x) - F(0) \quad = \quad \int_0^x \left[\sum_{k=0}^{n} a_k t^k + \rho(t)\right] dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} x^{k+1} + \int_0^x \rho(t)\ dt$$

Il suffit de prouver que $\displaystyle\int_0^x \rho(t)\ dt = o(x^{n+1})$: soit donc $\varepsilon > 0$ fixé. Comme $\rho(t) = o(t^n)$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t \in I,\ |t| \leq \eta \Rightarrow |\rho(t)| \leq t^n \varepsilon$.
Soit $x \in I$ tel que $|x| \leq \eta$. Alors pour tout $t \in [0, x] \cup [x, 0]$, $|\rho(t)| \leq \varepsilon t^n$. Par croissance de l'intégrale, il en résulte que

$$\left|\int_0^x \rho(t)\,dt\right| \leq \left|\int_0^x |t|^n\ dt \varepsilon\right| = \varepsilon \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

▲

Par *dérivation-primitivation*, nous obtenons :

Proposition 17.14.— Développements limités des fonctions usuelles ❤
Au voisinage de l'origine, les fonctions usuelles tan et Arctan admettent des développements limités de tous ordres :

- $\text{Arctan}\,(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
- $\tan(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)$

Démonstration ▽

- la fonction Arctan est dérivable et $\forall x \in \mathbf{R}$, $\text{Arctan}\,'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. En composant, $u(x) = x^2$ (simple substitution) avec le développement de $\dfrac{1}{1+u}$, on obtient directement celui de Arctan.
- Pour déterminer le développement limité de tan au voisinage de 0, on utilise la relation différentielle :
$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= x + o(x) \text{ (car } \tan(x) \underset{0}{\sim} x\text{), donc } \tan^2(x) = x^2 + o(x^2) \text{ et par conséquent}\\
\tan'(x) &= 1 + \tan^2(x) = 1 + x^2 + o(x^2). \quad \text{Par primitivation, il s'ensuit que}\\
\tan(x) &= x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad \text{, d'où l'on tire que } \tan^2(x) = x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \text{ et donc}\\
\tan'(x) &= 1 + \tan^2(x) = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4). \quad \text{Par primitivation, on en déduit finalement que}\\
\tan(x) &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)
\end{aligned}$$

▲

4.f Développement limité d'une dérivée

Théorème 17.15.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$, $0 \in I$, $n \in \mathbf{N}^\star$. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 :
$$f(x) = P(x) + o(x^n)$$
Si f est dérivable et que f' a un développement limité à l'ordre $n-1$ en 0, alors
$$f'(x) = P'(x) + o(x^{n-1})$$

Remarque : en particulier, ce théorème s'applique lorsque $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$. Mais en général, l'existence d'un DL_n de f n'entraîne pas l'existence d'un DL_{n-1} pour f'.

Démonstration ▽

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)\\
f'(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} k_k x^k + o(x^{n-1})
\end{aligned}$$

On intègre le DL_{n-1} puis on conclut par unicité du DL_n. ▲

Exercice : Déterminez le développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de 0 de $x \mapsto \ln\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)$.

4.g Développement limité d'une bijection réciproque

Exercice : Développement limité d'une application réciproque
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$la fonction définie par $f(x) = x\mathrm{ch}\,(x)$.

1. Justifiez que f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur lui-même. On note $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sa bijection réciproque.
2. Montrez que g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 de la forme

$$g(u) = a_1u + a_3u^3 + a_5u^5 + o(u^5)$$

3. Déterminez ce développement en exploitant la relation $g \circ f = id_{\mathbf{R}}$.

Solution ▽

1. *use the bijection thm*
2. $f(x) = x + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{24} + o(x^5)$.
3. $g(x) = x - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{17x^5}{24} + o(x^5)$.

III Extensions des développements limités

1 Développements limités en un point où la fonction n'est pas définie

Lors de notre étude des limites ou des équivalents de fonctions, nous avons débuté l'étude locale d'une fonction en un point du domaine de définition de f ou une extrémité éventuellement infinie de ce domaine. Dans ce paragraphe et le suivant, nous allons étendre la définition des développements limités à ce contexte plus général.

Définition : *Soit I un intervalle, $a \in \bar{I}$ et f une fonction définie dans I (éventuellement privé de a). On dit que f admet un* ***développement limité à l'ordre*** n ***au voisinage de*** a *s'il existe un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout réel $x \in I \setminus \{a\}$,*

$$\boxed{\begin{array}{lll}(DL_n(a)) \quad f(x) & = & P(x-a) + o_{x\to a}\left((x-a)^n\right) \\ & = & a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o_{x\to a}\left((x-a)^n\right)\end{array}}$$

On note $DL_n(a)$ ce développement limité.

Remarque : dans ce contexte légèrement plus général, si f a un $DL_n(a)$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \underset{a}{o}((x-a)^n)$$

- si $n \geq 0$ alors $\lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} a} f(x) = a_0$, donc f se prolonge en une fonction $\tilde{f}$, continue en a.
- si $n \geq 1$ alors $\lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} = a_1$, donc $\tilde{f}$ est dérivable en a et $\tilde{f}'(a) = a_1$.

En pratique : le changement de variable $x = a + t$ permet de se ramener au voisinage de l'origine. Lorsque la partie régulière n'est pas nulle, le développement limité de f se présente sous forme normalisée $f(a+t) = a_pt^p + a_{p+1}t^{p+1} + \cdots + a_nt^n + o_{t\to 0}(t^n)$, où $a_p \neq 0$.

Exemple : calculons le $DL_2(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

2 Développements limités en $\pm\infty$

Définition : *Si I est non majoré, on dit que f admet un* ***développement limité à l'ordre*** n ***au voisinage de*** $+\infty$ *s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout réel $x \in I \cap \mathbf{R}^{+\star}$,*

$$(DL_n(+\infty)) \qquad f(x) = P_n\big(\frac{1}{x}\big) + o_{+\infty}\big(\frac{1}{x^n}\big) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o_{+\infty}\big(\frac{1}{x^n}\big)$$

En pratique : pour déterminer le $DL_n(+\infty)$ de $f(x)$,

$\boxed{1}$ on pose $t = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+$ et $g(t) = f(1/t)$.

$\boxed{2}$ on forme $(DL_n g)_0)$: $g(t) = P(t) + o(t^n)$, puis finalement,

$\boxed{3}$ on obtient $DL_n f)_\infty$: $f(x) = P(\frac{1}{x}) + o(1/x^n)$.

Exemple : déterminons le $DL_2(+\infty)$ de $x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}}$

3 Développements limités généralisés

Soit $a \in \bar{I}$ un point de I ou une extrémité réelle de I, $f : I \setminus \{a\} \to \mathbf{R}$. On dit que f admet un **développement limité généralisé à l'ordre n au voisinage de** a, s'il existe $p \in \mathbf{N}^\star$ tel que $(x-a)^p\ f(x)$ admette un développement limité à l'ordre $n+p$ au voisinage de a. Le dévéloppement limité généralisé de f s'obtient alors en divisant par $(x-a)^p$:

$$\begin{array}{rcl} (x-a)^p\ f(x) & = & a_{-p} + \cdots + a_{p-1}(x-a)^{p-1} + a_0(x-a)^p + \cdots + a_n(x-a)^{n+p} + o_a(x-a)^{n+p} \\ f(x) & = & \underbrace{a_{-p}(x-a)^{-p} + \cdots + a_{-1}(x-a)^{-1}}_{\text{partie irrégulière}} + \underbrace{a_0 + \cdots + a_n x - a)^n}_{\text{partie régulière}} + o_a((x-a)^n) \end{array}$$

Ainsi, lorsqu'il existe, le $DLG_n(a)$ se compose de trois parties : la partie irrégulière est une fraction rationnelle de degré $-p$, la partie régulière est un polynôme de degré n, et le reste qui est négligeable devant $(x-a)^n$.

Remarque : lorsque $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, on peut toujours se ramener au voisinage de 0 au moyen d'un changement de variable adapté.

En pratique : Pour obtenir le $DLG_n(0)$ d'une fonction

$\boxed{1}$ On cherche un équivalent de f de la forme : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{a_{-p}}{x^p}$, avec $p \in \mathbf{N}^\star$.

$\boxed{2}$ On forme le développement limité à l'ordre $n+p$ de $x^p f(x)$:

$$x^p f(x) = a_{-p} + a_{1-p}x + \cdots + a_{-1}x^{p-1} + a_0 x^p + a_1 x^{p+1} + \cdots a_n x^{n+p} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+p})$$

$\boxed{3}$ On divise par x^p pour obtenir le $DLG_n(0)$:

$$f(x) = \frac{a_{-p}}{x^p} + \frac{a_{1-p}}{x^{p-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{x} + a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Exemple : formons le $DLG_3(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$.

$\boxed{1}$ $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$. Nous allons donc faire chercher le $DL_4(0)$ de $xf(x)$.

$\boxed{2}$ $xf(x) = \dfrac{x}{\sin(x)} = \dfrac{x}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)} = \dfrac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)}$.

Pour obtenir le $DL_4(0)$ de $xf(x)$, on effectue un changement de variable :

Posons $u(x) = -\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} + o(x^4)$ de sorte que

$$xf(x) = \frac{1}{1+u(x)}.$$

Or $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4)$.

On détermine les $DL_4(0)$ des puissances successives de $u(x)$:

$$\begin{array}{r|l} & u^0(x) \;=\; 1 \qquad\qquad\qquad\qquad +o(x^4) \\ - & u^1(x) \;=\; -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 \quad +o(x^4) \\ + & u^2(x) \;=\; \qquad\qquad +\frac{1}{36}x^4 \quad +o(x^5) \\ - & u^3(x) \;=\; \qquad\qquad\qquad 0 \quad +o(x^4) \end{array}$$

Ainsi $\dfrac{x}{\sin(x)} \;=\; 1 + \dfrac{x^2}{6} + (10-3)\dfrac{x^2}{360} + o_{x\to 0}(x^4) = 1 + \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{7x^2}{360} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$.

$\boxed{3}$ En divisant par x, nous obtenons finalement $\dfrac{1}{\sin(x)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{6} + \dfrac{7x^3}{360} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

Remarque : la fonction cotangente est définie pour $x \not\equiv 0\ [\pi]$ par $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$. En effectuant le produit du $DL_4(0)$ de $\cos(x)$ et du $DL_4(0)$ de $\frac{x}{\sin(x)}$, nous obtenons $x\operatorname{cotan}(x) = 1 - \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^4}{45} + o_{x\to 0}(x^4)$ d'où l'on tire finalement $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^3}{45} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

IV Applications des développements limités

Pour clore ce chapitre, passons en revue certains exemples d'application des développements limités.

1 Limite et comparaison des fonctions

1.a Étude de limite

Comme nous l'avons vu au début de notre étude des développements limités, la notion d'équivalence de fonctions est parfois insuffisante pour *lever une indétermination* dans une étude de limite. Les développements limités permettent dans tous les cas pratiques de lever l'indétermination. La difficulté consiste à trouver l'ordre des développements limités nécessaires pour le calcul :

Exercice : Étudiez les limites en 0 de

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{x^2}$
2. $g(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$

Solution ▽

1. *Il s'agit d'une forme indéterminée* $\frac{0}{0}$. *Pour la lever, nous souhaitons effectuer un développement limité du numérateur. Comme le dénominateur est un monôme de degré 2, nous développons le numérateur à l'ordre 2. Il vient* $\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$.
   Par conséquent, $f(x) = -\frac{1}{8} + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{8}$.
2. *Commençons par réduire au même dénominateur cette fraction :*
   $$g(x) = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$$
   Le dénominateur est équivalent au voisinage de 0 *au monôme* x^4. *Formons le développement limité à l'ordre 4 du numérateur. Comme* $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, *il en résulte que* $\sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$. *Par conséquent,* $g(x) = \dfrac{x^2 - \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4\right) + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{3} + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{3}$. ▲

1.b Recherche d'équivalents de fonctions

Proposition 17.16.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage d'un point $a \in I$:
$$f(x) = P(x-a) + o\big((x-a)^n\big),$$
où P est une fonction polynomiale **non nulle** de degré inférieur ou égal à n. Alors
$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} P(x-a)$$

Démonstration ▽

Supposons sans perte de généralité que $a = 0$. Au voisinage de l'origine, f s'écrit
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

Au voisinage de 0, la fonction polynomiale $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ est équivalente à son monôme de plus bas degré a_kx^k, où $k \in [\![0, n]\!]$ et $a_k \neq 0$. Ainsi, toute fonction négligeable devant x^n est *a fortiori* négligeable devant $P(x)$. D'après la caractérisation de l'équivalence avec les "o", il en résulte que $P(x) + o(x^n) \sim P(x)$. On conclut en invoquant la transitivité de la relation d'équivalence que

$$f(x) \sim P(x).$$

▲

En pratique : pour obtenir un équivalent, le plus simple possible de f au voisinage de a, vous développez $f(x)$ jusqu'à obtenir **un** terme significatif (non nul).

Exercice : Déterminez un équivalent au voisinage de 0 de

$$f(x) = \sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}} - 2\sqrt{2}.$$

Solution ▽

Au voisinage de 0*, nous avons déjà calculé le développement limité à l'ordre 4 de* $\sqrt{1 + \cos x}$ *:*

$$\sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2}\left(1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{384}\right) + o(x^4)$$

Déterminons le développement limité à l'ordre 4 de $\sqrt{1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$ *:*

Par opérations algébriques sur les développements limités à l'ordre 4 de e^x *et* e^{-x}*, nous obtenons :*

$$1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

D'où, il vient $\sqrt{1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \sqrt{2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^4)}$.

Posons $u(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^4) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. *Nous pouvons composer les développements limités :*

$$\sqrt{1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u(x) - \frac{18}{u}^{2}(x) + o(x^4)$$

$$\begin{array}{r||ccccccc}
1\times & \bullet & 1 & = & 1 & & & +o(x^4) \\
\frac{1}{2}\times & \bullet & u(x) & = & & \frac{x^2}{4} & +\frac{x^4}{48} & +o(x^4) \\
-\frac{1}{8}\times & \bullet & u^2(x) & = & & & \frac{x^4}{16} & +o(x^4)
\end{array}$$

Ainsi,

$$\sqrt{1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{384}\right) + o(x^4)$$

Finalement, en ajoutant les développements limités obtenus, il vient :

$$g(x) = \frac{x^4}{192} + o(x^4)$$

En particulier, $g(x) \sim \frac{x^4}{192}$. ▲

2 Étude locale des fonctions

2.a Étude d'un prolongement

On utilise la régularité des fonctions possédant des DL. Une fonction qui admet un $DL_n(a)$, avec $n \geq 0$ est nécessairement prolongeable par continuité en ce point. Si de plus, $n \geq 1$, alors le prolongement est même dérivable en a.

Exercice : Soit $f : \mathbf{R}^{+\star} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$.

1. Démontrez que f est prolongeable par continuité au point 1.

2. Ce prolongement est-il dérivable ?

Solution ▽

1. *Faisons le changement de variable* $x = 1 + t$. *Comme* $\lim_{t\to 0} \frac{1+t}{t+2}\ \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{2} \in \mathbf{R}$, f *est prolongeable par continuité au point* 1 *en posant* $f(1) = \frac{1}{2}$.

2. *Notons* $\varphi(t) = \frac{f(1+t) - f(1)}{t}$ *les taux de variations de* f *au point 1.*

$$\varphi(t) = \frac{1}{t}\ \left(\frac{(1+t)\ \ln(1+t)}{t\,(t+2)} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2(1+t)\ \ln(1+t) - t\,(t+2)}{2\,t^2\,(t+2)}$$

Il s'agit d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. *Comme le dénominateur est équivalent à* $4t^2$ *au voisinage de 0, je fais un développement limité à l'ordre 2 du numérateur : en utilisant le développement usuel* $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, *j'obtiens :*

$$\varphi(t) = \frac{2(t + \frac{1}{2}t^2) - t(t+2) + o(t^2)}{2t^2\,(t+2)} = \frac{o(t^2)}{2t^2\,(t+2)} = \frac{o(1)}{2+t} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Ainsi, le prolongement est dérivable au point 1 et $f'(1) = 0$. ▲

2.b Étude des tangentes

Exercice : Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$.

1. Déterminez le développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0.

2. En déduire l'équation de la tangente Δ à Γ_f en 0 ainsi que les positions relatives de Γ_f et Δ au voisinage de 0.

2.c Nature d'un point critique

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable dans I et $a \in \overset{\circ}{I}$ un point intérieur à I. Nous savons que si f présente un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$. Les extremums locaux de f sont donc à rechercher parmi les points critiques, c'est-à-dire les points en lesquels la dérivée s'annule.
Pour autant, tout point critique de f n'est pas nécessairement un extremum : ainsi 0 est un point critique de $x \mapsto x^3$ même si ce n'est pas un extremum !

En pratique : Pour étudier la nature d'un point critique a de f

$\boxed{1}$ On effectue le $DL_n(a)$ de f, avec $n \geq 2$ suffisamment élevé pour que la partie régulière ait un terme significatif (non nul) de degré n.

$$f(x) = f(a) + 0\ (x-a) + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}(x-a)^n, \text{ avec } a_n \neq 0$$

$\boxed{2}$ Ainsi $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} a_n(x-a)^n$. Pour conclure, on discute suivant la parité de n :

- si n est impair, a n'est pas un extremum local,
- si n est pair, a est un maximum (resp. miminimum) local si $a_n > 0$ (resp $a_n < 0$).

2.d Étude des branches infinies

On peut utiliser un développement généralisé pour montrer la présence d'une droite asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $\pm\infty$ et étudier leurs positions relatives. Pour cela

$\boxed{1}$ On forme un DLG au voisinage de $+\infty$ de $f(x)$ à l'ordre $n \geq 1$ de la forme :

$$f(x) = a_{-1}\ x + a_0 + \frac{a_n}{x^n} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^n}\right) \text{ avec } a_n \neq 0.$$

$\boxed{2}$ La courbe admet alors la droite $y = a_{-1}\ x + a_0$ pour asymptote et la position de la branche infinie par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $\frac{a_n}{x^n}$.

Exercice : étudiez la nature de la branche infinie de $f(x) = (x+1)e^{1/x}$ au voisinage de $+\infty$.

Solution ▽

$\boxed{1}$ *On forme le* $DLG_1(+\infty)$ *de* $f(x)$*. On se ramène en* 0^+ *au moyen du changement de variable* $x = 1/t$ *et on étudie la fonction* $g(t) = f(1/t)$*. Comme* $g(t) \sim_0 \dfrac{1}{t}$*, on forme un* $DL_2(0)$ *de* $tg(t)$*.*

$$tg(t) = (1+t)e^t = (1+t)(1+t+\tfrac{1}{2}t^2) + o(t^2) = 1 + 2t + \tfrac{3}{2}t^2 + o(t^2)$$

D'où l'on tire $g(t) = \dfrac{1}{t} + 2 + \dfrac{3}{2}t + o(t)$*, puis* $f(x) = x + 2 + \dfrac{3}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.

$\boxed{2}$ *La droite* $\mathcal{D}$ *d'équation cartésienne* $y = x + 2$ *est asymptote à la courbe représentative* Γ *de* f *au voisinage de* $+\infty$ *et* Γ *est située localement au-dessous de* $\mathcal{D}$*.*

3 Application à l'étude des suites numériques

3.a Développement asymptotique d'une suite $u_n = f(n)$

Une suite de nombres réels est par définition une fonction de **N** vers **R**. Comme telle, elle peut admettre un développement limité (éventuellement généralisé) au voisinage de $+\infty$. On parle alors de développement asymptotique.

Proposition-Définition 17.17.— Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite définie par $u_n = f(n)$ où $f : I\ to$**R** est définie sur un intervalle non majoré de **R**. On suppose que f admet un développement limité généralisé à l'ordre p au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = a_{-q}x^q + \cdots + a_{-1}x + a_0 + a_1\frac{1}{x} + \cdots + a_p\frac{1}{x^p} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^p}\right)$$

Alors (u_n) admet pour **développement asymptotique** à l'ordre p :

$$(DA_p) \quad u_n = a_{-q}n^q + \cdots + a_{-1}n + a_0 + a_1\frac{1}{n} + \cdots + a_p\frac{1}{n^p} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

En pratique : lorsque $u_n = g(\frac{1}{n})$ où g admet un $DL_p(0)$, on obtient directement un développement asymptotique de u_n en composant (à droite) le $DL_p(0)$ de g par $\frac{1}{n}$:

$\boxed{1}$ On forme le $DL_p(0)$ de g : $g(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_px^p + \underset{x\to0}{o}(x^p)$

$\boxed{2}$ On en déduit que $u_n = g\left(\dfrac{1}{n}\right) = a_0 + \dfrac{a_1}{n} + \cdots + \dfrac{a_p}{n^p} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$

3.b Développement asymptotique d'une suite implicite

Exemple : d'après les propriétés de la fonction tan, on sait que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, il existe un seul réel $x_n \in \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\tan(x_n) = x_n$. Déterminons un développement asymptotique à trois termes significatifs de x_n.

Soit $n \in \mathbf{N}$.

$\boxed{1}$ Comme $n\pi - \frac{\pi}{2} < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$, alors $1 - \frac{1}{2n} < \frac{x_n}{n\pi} < 1 + \frac{1}{2n}$. Par encadrement, il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n\pi} = 1$, soit encore $x_n \sim n\pi$.

$\boxed{2}$ On pose $y_n = x_n - n\pi$. D'après (E_n), $\tan(y_n) = \tan(x_n) = x_n$ et comme $y_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, il en résulte que $y_n = \operatorname{Arctan}(x_n)$, avec $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2}$, alors $y_n \sim \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{3}$ On pose $z_n = y_n - \frac{\pi}{2}$. D'après (E_n), $\tan(z_n) = \dfrac{-1}{\tan(y_n)} = \dfrac{-1}{x_n} \sim -\dfrac{1}{n\pi}$ de sorte que $z_n \sim -\dfrac{1}{n\pi}$.

$\boxed{4}$ Ainsi, $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.