PROGRAMME DE COLLE S32

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

ESPACES PROBABILISÉS FINIS

▪▪▪ Le langage des probabilités

Définition : *Une **expérience aléatoire** (e.a.) est une expérience dont on ne peut prédire avec certitude le résultat. Un résultat possible est appelé une **éventualité**, l'ensemble des éventualités est l'**univers des possibles**, noté Ω.*

Définition : *Un **événement aléatoire** est un événement qui peut se produire ou non, suivant le résultat de l'expérience aléatoire. On le représente par l'ensemble des éventualités qui le réalisent. Il s'agit donc d'une partie de Ω, $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. À la suite d'une e.a. on dira que l'**événement A est réalisé** si le résultat ω de cette expérience appartient à A.*

Vocabulaire : *Ω est l'événement certain, $\emptyset$ est l'événement impossible.*

L'identification entre événements aléatoires et parties de Ω permet d'utiliser les opérations élémentaires ensemblistes pour traduire certains événements, ainsi

- l'événement (A *ou* B), appelé **disjonction de** A **et** B, est modélisé par la réunion $A \cup B$;
- l'événement (A *et* B), appelé **conjonction de** A **et** B, est modélisé par l'intersection $A \cap B$;
- l'événement $\bar{A}$, appelé **contraire de** A, est modélisé par le complémentaire de A $\Omega \setminus A$.

Le fait que la réalisation de A entraîne celle de B ($A \Rightarrow B$) se traduit simplement par $A \subset B$.

Définition : *Deux **événements** $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$ sont dits **incompatibles** lorsqu'il est impossible qu'ils soient réalisés simultanément, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$.*

Définition : *Une famille finie $(A_i)_{i\in I}$ d'événements forme un **système complet d'événements** (SCE) si les A_i sont 2 à 2 incompatibles et recouvrent Ω : $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$ et pour tout couple $(i, j) \in I^2$ d'éléments distincts $A_i \cap A_j = \emptyset$.*

▪▪▪ Espace probabilisé fini

Définition : *Soit Ω un ensemble fini, non vide. On appelle **probabilité** sur Ω toute application $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, 1]$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :*
($\mathbb{P}_1$) $P(\Omega) = 1$
($\mathbb{P}_2$) ***si** A et B sont incompatibles, **alors** $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$*
*On dit alors que (Ω, P) est un **espace probabilisé fini**, et pour tout événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on appelle **probabilité de** A le nombre $P(A) \in [0, 1]$.*

Théorème*.— On considère une ea pour laquelle l'univers des possibles Ω est fini, non vide. Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ une partie de Ω. La **probabilité uniforme** pour que l'événement A soit réalisé à l'issue de l'expérience aléatoire est donnée par :

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Card }(A)}{\text{Card }(\Omega)} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}}$$

Le procédé $A \mapsto P(A)$ définit une probabilité sur Ω appelée **probabilité uniforme**.

Théorème.— Propriétés des probabilités —. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit A et B des événements. Alors

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Vocabulaire : *un événement B est dit **négligeable** pour la probabilité P lorsque $P(B) = 0$.*

Théorème.— Formule d'additivité finie —. Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'événements **deux à deux incompatibles**, alors

$$\boxed{P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)}$$

Remarque : en particulier, une probabilité sur $\Omega = \{w_1, \ldots, \omega_n\}$ est donc entièrement déterminée par la donnée des probabilités des événements élémentaires. Plus précisément :

Théorème*.— Soit $\Omega = \{w_1, \ldots, \omega_n\}$ un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbf{N}^\star$ et $(p_1, \ldots, p_n)$ un n-uplet de nombres réels positifs. Pour qu'il existe une probabilité $P : \Omega \to [0, 1]$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(\{\omega_i\}) = p_i$ il faut et il suffit que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

■■■ Conditionnement

Définition : *Soit (Ω, P) un espace probabilisé et B un événement non négligeable. Pour tout événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on définit la* ***probabilité conditionnelle de** A **sachant** B par :* $P(A|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Proposition*.— Soit (Ω, P) un espace probabilisé et B un événement non négligeable. L'application $A \mapsto P_B(A)$ est une probabilité sur Ω, et vérifie donc toutes les propriétés des probabilités déjà établies.

Corollaire.— Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Pour tous événements A et B tels que $P(B) > 0$,

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)}$$

Proposition.— Formule des probabilités composées —. Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. Alors

$$\boxed{P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times \cdots \times P(A_n \,|\, A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})}$$

Théorème.— Formule des probabilités totales —. Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements non négligeables. Pour tout événement $B \in \mathscr{P}(\Omega)$,

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B \,|\, A_i)}$$

Théorème.— Formules de Bayes —. Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements non négligeables. Pour tout événement B non négligeable, et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\boxed{P(A_j \,|\, B) = \dfrac{P(A_j) \times P(B \,|\, A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B \,|\, A_i)}}$$

■■■ Indépendance en probabilité

Définition : *Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Deux événements A et B sont* ***indépendants pour la probabilité** P lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. En particulier, si $P(B) > 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.*

Proposition.— Soit (Ω, P) un espace probabilisé, A, B des événements indépendants pour P, alors

- les événements A et $\bar{B}$ sont indépendants.
- les événements $\bar{A}$ et B sont indépendants.
- les événements $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

Définition : *Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$ une famille d'événements. Ces événements sont dits* ***mutuellement indépendants*** *si pour tous $i_1, \ldots, i_k \in [\![1, n]\!]$, $P\big(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\big) = P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_k})$.*

Proposition.— Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$ une famille d'événements **mutuellement indépendants**. Toute *sous-famille* $(A_{i_1}, \ldots, A_{i_k})$ $(k \leq n)$ est formée d'événements **mutuellement indépendants**.

Proposition.— Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$ une famille d'événements **mutuellement indépendants**. Soit $(B_1, \ldots, B_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$ une famille d'événements telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \bar{A}_i$. Alors les événements $B_1, \ldots, B_n$ sont mutuellement indépendants.