PROGRAMME DE COLLE S10

NB : seules les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

SUITES NUMÉRIQUES (I)

■■■ Convergence des suites de nombres réels

Définition : *Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels et $\ell \in \mathbf{R}$. On dit que*

- u ***converge vers*** ℓ*, et on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$*, si* $(\forall \varepsilon > 0), (\exists n_0 \in \mathbf{N});\ (\forall n \in \mathbf{N})\ \big((n \geq n_0) \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon\big)$
- u ***diverge vers*** $+\infty$*, et on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *si* $(\forall A \in \mathbf{R}),\ (\exists n_0 \in \mathbf{N});\ (\forall n \in \mathbf{N})\ \big((n \geq n_0) \Rightarrow (u_n \geq A)\big)$
- u ***diverge vers*** $-\infty$*, et on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ *si* $(\forall A \in \mathbf{R}),\ (\exists n_0 \in \mathbf{N});\ (\forall n \in \mathbf{N})\ \big((n \geq n_0) \Rightarrow (u_n \leq A)\big)$

Théorème.— Unicité de la limite —. Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels, $(\ell, \ell') \in \bar{\mathbf{R}}^2$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell'$, **alors** $\ell = \ell'$.

Proposition*.— Une petite caractérisation —. Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels et $\ell \in \mathbf{R}$.

La suite u converge vers ℓ *si et seulement si* il existe une suite v, convergente vers 0, telle que $u = \ell + v$.

Théorème.— Limite finie et bornitude —. Toute suite convergente est bornée.

Proposition.— Limites et inégalités —. Soit u et v deux suites de nombres réels possédant une limite.

- **Si** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ **alors** il existe $n_0 \in \mathbf{N}$; tel que $(\forall n \in \mathbf{N}),\ \big(n \geq n_0 \Rightarrow u_n < v_n\big)$
- **S'**il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $(\forall n \geq n_0)$, $u_n \leq v_n$ **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

■■■ Théorèmes d'existence de limite

Proposition.— Suites extraites d'une suite admettant une limite —. Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ et $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$.

Si u admet pour limite ℓ **alors** toute suite extraite de u admet pour limite ℓ.

Proposition.— Convergence par complémentarité —. Soit (u_n) une suite de nombres réels, et $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$.
Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) formées respectivement des termes de rangs pairs et impairs de la suite u tendent toutes deux vers ℓ, **alors** (u_n) tend vers ℓ.

Théorème*.— Existence de limite par opérations algébriques —. Soit $(u, v) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, $(\ell, \ell') \in \bar{\mathbf{R}} \times \bar{\mathbf{R}}$, $\lambda \in \mathbf{R}^{\star}$.

- **Si** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$.
- **Si** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda \cdot u_n) = \lambda.\ell$.
- **Si** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$.
- **Si** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$.
- **Si** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \neq 0$, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(1/u_n\big) = 1/\ell$,
- **Si** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(1/u_n\big) = +\infty$.

Exercice 3 : Convergence en moyenne de Césarò —. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ une suite convergente vers 0. On lui associe la suite de ses moyennes arithmétiques définie par $\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrez que v est convergente vers 0.

Théorème.— Existence de limite par comparaison, encadrement —. Soit $(u,v) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ et $\ell \in \mathbf{R}$.

- **Si** $\begin{cases} \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \\ \bullet \forall n \in \mathbf{N},\ |v_n| \le u_n \end{cases}$ **alors** v est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
- **Si** $\begin{cases} \bullet\ u \text{ et } w \text{ convergent vers } \ell. \\ \bullet \forall n \in \mathbf{N},\ u_n \le v_n \le w_n \end{cases}$ **alors** v est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell.$
- **Si** $\begin{cases} \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \\ \bullet \forall n \in \mathbf{N},\ v_n \ge u_n \end{cases}$ **alors** v est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Théorème.— Théorème de la limite monotone —. Soit $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite **monotone**. Alors u est convergente *si et seulement si* u est bornée. Plus précisément

- Soit u un suite **croissante** de nombres réels.
  - Si u est majorée (dans $\mathbf{R}$), alors u est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_n u_n$.
  - Si u n'est pas majorée alors u est divergente vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Soit u un suite **décroissante** de nombres réels.
  - Si u est minorée (dans $\mathbf{R}$), alors u est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_n u_n$.
  - Si u n'est pas minorée alors u est divergente vers $-\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Définition : *Soit $(u,v) \in (\mathbf{R}^{\mathbf{N}})^2$. Les suites u et v sont dites **adjacentes** si*

- *l'une est croissante et l'autre décroissante.*
- *$(u_n - v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite nulle.*

Théorème.— Théorème de convergence des suites adjacentes —. Soit u et v deux suites **adjacentes**.

u et v sont convergentes et ont même limite.

Corollaire.— Soit u et v deux suites adjacentes. On suppose que $(u_n) \nearrow$ et $(v_n) \searrow$. Soit $\ell \in \mathbf{R}$ leur limite commune, alors

$$\forall (n,p) \in \mathbf{N}^2,\ u_n \le \ell \le v_p$$

Corollaire*.— Théorème des segments emboîtés —. Soit $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de segments non vides et tels que

- les segments sont emboîtés : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad S_{n+1} \subset S_n$
- la suite $\big(\mathsf{Lg}(S_n)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ des longueurs des segments S_n est convergente vers 0.

Alors l'intersection de tous les S_n est non vide et réduite à un point : il existe $\ell \in \mathbf{R}$, tel que $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} S_n = \{\ell\}$.

Savoir-faire : construction de suites adjacentes par dichotomie.

Exercice 4 : un théorème d'existence de point fixe —. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction croissante. Montrez qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$.

Théorème*.— Théorème de Bolzano-Weierstraß —. De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente. Plus précisément, soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une **suite bornée** de nombres réels. Alors,
Il existe $\ell \in \mathbf{R}$ et $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, une application strictement croissante, telles que

$$\lim_{k\to+\infty} u_{\varphi(k)} = \ell$$