PROGRAMME DE COLLE S24

NB : seules les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

APPLICATIONS LINÉAIRES

■■■ Applications linéaires

Définition : *Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbf{K}$ et $f : E \to F$ une application. On dit que f est **linéaire** de E dans F lorsque*

$$\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ \forall(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2,\quad f(\lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{y}) = \lambda\cdot f(\vec{x}) + \mu\cdot f(\vec{y})$$

Notation : *On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F, $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.*

Proposition.— $\big(\mathcal{L}(E,F),+,\cdot\big)$ est un $\mathbf{K}$-ev.

Proposition.— Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors $g\circ f : E \to G$ est une application linéaire de E dans G.

Endomorphismes

Proposition.— $\big(\mathcal{L}(E),+,\circ\big)$ est un anneau.

Définition : Polynôme d'endomorphisme —. *Soient $P \in \mathbf{K}[X]$, $P = a_pX^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1X + a_0$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par*

$$P(f) = a_p\ f^p + a_{p-1}\ f^{p-1} + \cdots + a_1\ f + a_0\ id_E$$

Théorème*.— Formule du binôme et identité géométrique —. Soient f,g deux endomorphismes de E tels que $f\circ g = g\circ f$. Alors pour tout entier $n \in \mathbf{N}$

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^k\circ g^{n-k} \qquad f^{n+1}-g^{n+1} = (f-g)\circ\sum_{k=0}^{n} f^k\circ g^{n-k}$$

Isomorphismes

Définition : *Soient E et F deux $\mathbf{K}$-ev. On appelle **isomorphisme** de E sur F toute application linéaire et bijective f de E sur F.*

Proposition.— Isomorphisme réciproque
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ un isomorphisme de E sur F. Alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E, appelé **isomorphisme réciproque** de f.

■■■ Noyau et image d'une application linéaire

Définition : *Soit $f : E \to F$ une application linéaire.*

- *l'image de f est l'image directe de E par f. On note* $\mathsf{Im}\, f = \{f(\vec{x})\,;\ \vec{x}\in E\} = \{\vec{y}\in F \mid \exists\vec{x}\in E\,;\ f(\vec{x})=\vec{y}\}$
- *le noyau de f est l'ensemble des antécédents de $\vec{0}_F$ par f. On note* $\mathsf{Ker}\, f = \{\vec{x}\in E \mid f(\vec{x}) = \vec{0}_F\}$.

Proposition.— Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors

- $\mathsf{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de F.
- $\mathsf{Ker}\, f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème.— caractérisation des applications linéaires injectives/surjectives
Soient E,F des $\mathbf{K}$-e.v et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire de E vers F, alors

- f est surjective *si et seulement si* $\mathsf{Im}\, f = F$
- f est injective *si et seulement si* $\mathsf{Ker}\, f = \{\vec{0}_E\}$

■■■ Image d'une base par une application linéaire

Proposition.— Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base d'un $\mathbf{K}$-ev E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\boxed{\mathsf{Im}\, f = \mathsf{Vect}\left(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)\right)}$$

Proposition.— Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base d'un $\mathbf{K}$-ev E et $\mathscr{F} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ une famille de n vecteurs de F.

$$\boxed{\text{Il existe une application linéaire } f : E \to F, \text{ unique telle que } \forall i \in [\![1, n]\!], \quad f(\vec{e}_i) = \vec{f}_i}$$

Théorème.— Caractérisation des isomorphismes par les bases —. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.

• f est injective	*si et seulement si*	$\left(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)\right)$ est libre dans F
• f est surjective	*si et seulement si*	$\left(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)\right)$ est génératrice de F
• f est un isomorphisme	*si et seulement si*	$\left(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)\right)$ est une base de F

■■■ Exemples d'applications linéaires

Définition : application linéaire a canoniquement associée à une matrice
*Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice à coefficients dans $\mathbf{K}$. On définit l'**application linéaire a canoniquement associée à** A par :*

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{K}^p,\ a(x_1, \dots, x_p) = (y_1, \dots, y_n),$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

où les coefficients $y_1, \dots, y_n$ de l'image sont obtenus grâce à la relation matricielle ci-contre.

Définition : Projections, symétries
Soit E_1 et E_2 deux sev supplémentaires d'un $\mathbf{K}$-ev E, de sorte que tout vecteur $\vec{x}$ de E s'écrit de manière unique : $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, où $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_2$.

- *La **projection de E sur E_1 parallèlement à E_2**, est l'application notée $p_{E_1,E_2} : E \to E$ définie par :*

$$\forall \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in E;\ p_{E_1,E_2}(\vec{x}) = \vec{x}_1$$

- *La **symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2**, est l'application notée $s_{E_1,E_2} : E \to E$ définie par :*

$$\forall \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in E;\ s_{E_1,E_2}(\vec{x}) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$$

Proposition.— La projection p_{E_1,E_2} et la symétrie s_{E_1,E_2} sont des endomorphismes de E qui vérifient :

- $\mathsf{Im}\, p_{E_1,E_2} = E_1$
- $\mathsf{Ker}\, p_{E_1,E_2} = E_2$
- $p_{E_1,E_2} \circ p_{E_1,E_2} = p_{E_1,E_2}$
- $s_{E_1,E_2} \circ s_{E_1,E_2} = id_E$
- s_{E_1,E_2} est un automorphisme de E et $s_{E_1,E_2}^{-1} = s_{E_1,E_2}$.
- $s_{E_1,E_2} = 2p_{E_1,E_2} - id_E$

Théorème.— Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur, *i.e.* une application linéaire vérifiant $p \circ p = p$. Alors

- $\mathsf{Ker}\, p$ et $\mathsf{Im}\, p$ sont supplémentaires, *i.e.* $E = \mathsf{Ker}\, p \oplus \mathsf{Im}\, p$
- p est la projection de E sur $\mathsf{Im}\, p$ parallélement à $\mathsf{Ker}\, p$.

Théorème.— Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une involution, *i.e.* un endomorphisme de E vérifiant $s \circ s = id_E$. Alors

- $\mathsf{Ker}\,(s - id_E)$ et $\mathsf{Ker}\,(s + id_E)$ sont supplémentaires, *i.e.* $E = \mathsf{Ker}\,(s - id_E) \oplus \mathsf{Ker}\,(s + id_E)$
- s est la symétrie par rapport à $\mathsf{Ker}\,(s - id_E)$ parallèlement à $\mathsf{Ker}\,(s + id_E)$.

Savoir-Faire : montrer qu'un endomorphisme est un projecteur ou un automorphisme involutif et trouver ses éléments caractéristiques.