PROGRAMME DE COLLE S03

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

FONCTIONS NUMÉRIQUES : GÉNÉRALITÉS

■■■ Fonctions monotones

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction réelle. On dit que f est*

- ***croissante** sur I si pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$, la relation $x_1 \leq x_2$ entraîne $f(x_1) \leq f(x_2)$.*
- ***décroissante** sur I si pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$, la relation $x_1 \leq x_2$ entraîne $f(x_1) \geq f(x_2)$.*
- ***strictement croissante** sur I si pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$, la relation $x_1 < x_2$ entraîne $f(x_1) < f(x_2)$.*
- ***strictement décroissante** sur I si pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$, la relation $x_1 < x_2$ entraîne $f(x_1) > f(x_2)$.*

Définition : *Une fonction est dite **monotone** si elle est croissante ou décroissante sur I, elle est dite **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.*

■■■ Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition : *Soit $f : I \to J$ une fonction définie sur un intervalle I, à valeurs dans J. f est dite :*

- ***injective** si tout élément y de J a au plus un antécédent dans I.*
- ***surjective** si tout élément y de J a au moins un antécédent dans I.*
- ***bijective** si tout élément y de J a exactement un antécédent dans I.*

Proposition.— Point de vue équations —. Soit $f : I \to J$ une application. On considère pour $y \in J$ l'équation d'inconnue $x \in I$

$$f(x) = y \qquad (1)$$

$$\boxed{f \text{ est bijective } \textit{ssi} \text{ pour tout } y \in F, \text{ l'équation (1) admet une unique solution dans } I.}$$

Définition : *Soit $f : I \to J$ une **bijection**. On définit une nouvelle application $f^{-1} : J \to I$, appelée **application réciproque** de f, en posant pour tout $y \in J$, $f^{-1}(y) = x$ où x est l'unique antécédent de y par f.*

Corollaire.— Soit $f : I \to J$ une **bijection**. Pour tout couple $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$,

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \bullet\ x \in I & & \bullet\ y \in J \\ \bullet\ y = f(x) & \iff & \bullet\ x = f^{-1}(y) \end{array}}$$

Savoir-faire : résoudre et discuter suivant la valeur de $y \in J$ l'équation $y = f(x)$ pour établir l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité de f, et le cas échéant, déterminer l'application réciproque de f.

Proposition.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ alors

- f est strictement croissante *si et seulement si* f est croissante et injective.
- f est strictement décroissante *si et seulement si* f est décroissante et injective.

■■■ Limites

Théorème*.— Opérations algébriques sur des fonctions admettant une limite —. Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$, a un élt de I ou une extrémité de I, $\ell, k \in \bar{\mathbf{R}}$, et $\lambda \in \mathbf{R}^\star$ un nombre réel. On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} g(x) = k$. Alors

- $\lim_{x\to a} |f(x)| = |\ell|$.
- $\lim_{x\to a} (\lambda f(x)) = \lambda\, \ell$
- $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \ell + k$
- $\lim_{x\to a} f(x) \times g(x) = \ell \times k$
- si $\ell \neq 0$, alors $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$
- si $k \neq 0$, alors $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{k}$

pourvu que ces opérations aient un sens dans $\bar{\mathbf{R}}$.

Proposition*.— Composition des limites —. Soit $f : J \to \mathbf{R}$ et $y : I \to J$, a (resp. b) un élément de I (resp J) ou une extrémité de I (resp. J) et $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$.

$$\boxed{\textbf{Si} \left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim_{x\to a} y(x) = b \\ \bullet\ \lim_{y\to b} f(y) = \ell \end{array}\right) \quad \textbf{alors} \quad \lim_{x\to a} f \circ y(x) = \ell}$$

■ ■ ■ Continuité

Théorème*.— TVI —. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur I, $(a,b) \in I^2$ tel que $a \leq b$.

$$\boxed{\text{Pour toute valeur } \gamma, \text{ comprise entre } f(a) \text{ et } f(b), \text{ il existe } c \in [a,b] \text{ tel que } f(c) = \gamma.}$$

Théorème*.— Théorème de la bijection bicontinue —. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et f une application continue et strictement monotone sur I. Alors

- $f(I)$ est un intervalle, noté J.
- $f : I \to J$ est une bijection de I sur J,
- $f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone, de même monotonie que f.
- $f^{-1} : J \to I$ est continue de J sur I.

Savoir-faire : déterminer l'ensemble image $f(I) = \{f(x)\,; x \in I\}$ à l'aide des limites de f aux bornes de l'intervalle I.

Corollaire*.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I, $(a,b) \in I^2$ tel que $a \leq b$.

$$\boxed{\text{Pour toute valeur } \gamma, \text{ comprise entre } f(a) \text{ et } f(b), \text{ il existe } c \in [a,b], \text{ unique tel que } f(c) = \gamma.}$$

■ ■ ■ Dérivabilité

Définition : *La fonction* $f : I \to \mathbf{R}$ *est* ***dérivable*** *en* $a \in I$ *si* $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ *existe et est finie. En ce cas, on note* $f'(a)$ *ce réel.*

Proposition*.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$. **Si** f est dérivable au point $a \in I$, **alors** f est continue au point a.

Théorème*.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I non réduit à un point.

- f est croissante (*resp.* décroissante) sur I *si et seulement si* $f' \geq 0$. (*resp.* $f' \leq 0$)
- f est constante sur I *si et seulement si* $f' = 0$.
- **si** $f' > 0$, (*resp.* $f' < 0$) **alors** f est strictement croissante sur I. (*resp.* strictement décroissante)

Théorème*.— cf. techniques & méthodes Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur I, dérivable dans $I \setminus \{a\}$.

- **S**'il existe $d \in \mathbf{R}$ tel que $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f'(x) = d$, **alors** f est dérivable en a et $f'(a) = d$
- **Si** $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f'(x) = \pm\infty$, **alors** f n'est pas dérivable en a et $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$.

Proposition*.— Opérations algébriques sur les dérivées —. Soit $u, v : I \to \mathbf{R}$ des fonctions dérivables sur I. **Alors**

- $\lambda \cdot u$ est dérivable sur I et $(\lambda \cdot u)' = \lambda \cdot u'$
- $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$
- $u \times v$ est dérivable sur I et $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
- $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I [1] et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

Proposition*.— Règle de dérivation en chaîne —. Soit $u : I \to J$, $f : J \to \mathbf{R}$ des fonctions dérivables. Alors

$$\boxed{f \circ u \text{ est dérivable sur } I \text{ et } (f \circ u)' = \big(f' \circ u\big) \times u'}$$

Proposition*.— Dérivabilité de l'application réciproque d'un bijection —. Soit $f : I \to J$ une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J. **Si** f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}}$$

1. si v ne s'annule pas sur I