TECHNIQUES & MÉTHODES S13

NB : cette fiche reprend les techniques nécessaires **minimales** ; elle ne constitue donc pas un objectif, mais un prérequis !

COMMENT DÉMONTRER QU'UNE FONCTION EST CONTINUE

▪▪▪ Comment démontrer qu'une fonction est continue en un point

Soit $f : I \to \mathbf{R}$, $a \in I$. Étudier la continuité de f en a revient à établir que $\lim_a f = f(a)$. Il s'agit donc d'un calcul de limite et les méthodes présentées au chapitre précédent s'appliquent. À noter toutefois, le cas particulier d'une fonction définie par des expressions différentes à gauche et à droite de a. En ce cas, on étudie la continuité à gauche et à droite de f en a.

▪▪▪ Comment démontrer qu'une fonction est continue sur son domaine de définition

$\boxed{1}$ sur certains sous-intervalles **ouverts**, la fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est construite à partir de fonctions usuelles par opérations algébriques ou composition. On peut alors appliquer les **théorèmes d'opérations**. Vous vérifiez simplement que les composées, les inverses sont bien définis ...

$\boxed{2}$ il se peut qu'une étude ponctuelle soit nécessaire en quelques points particuliers (aux bornes des intervalles ouverts ci-dessus). C'est le cas notamment lorsque la fonction est définie par des expressions différentes sur des *demi-intervalles* à gauche et à droite de a : en ce cas, étudiez séparément la continuité à gauche et à droite en a.

▪▪▪ Comment démontrer qu'une fonction est prolongeable par continuité

Il s'agit d'un simple calcul de limite : si la fonction $f : I \setminus \{a\}$ possède une limite **finie** en a $\ell = \lim_{x \overset{\neq}{\to} a} f(x) \in \mathbf{R}$, au point a, alors f admet pour prolongement continue en a la fonction $\tilde{f} = I \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in I,\ \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

▪▪▪ Comment démontrer qu'une fonction est uniformément continue sur I

Vous pouvez :

- montrer que f est lipschitzienne ;
- si $I = [a, b]$ est un segment, montrer que f est continue et conclure à l'aide du **théorème de Heine** ;

Plus rarement, vous pouvez revenir à la définition : étant donné $\varepsilon > 0$, il s'agit de trouver $\eta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in I^2$, $|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

COMMENT APPLIQUER LES THÉORÈMES FONDAMENTAUX

▪▪▪ Comment étudier la bijectivité de f

- Pour montrer que $f : I \to J$ est bijective **et** déterminer son application réciproque, on adopte le **point de vue des équations** : f est bijective ssi pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution x dans I. On a alors $x = f^{-1}(y)$.
- Le **théorème de la bijection** permet de montrer que f établit une bijection de I sur $J = f(I)$ et d'expliciter le tableau de variation de f^{-1} *sans avoir à déterminer* f^{-1}. Il suffit de montrer que $f : I \to \mathbf{R}$ et continue et strictement monotone sur I.

▪▪▪ Comment résoudre l'équation $f(x) = 0$

- Si la question est simplement de prouver l'**existence** d'une solution, l'utilisation du **TVI** permet certainement de répondre à la question :
  Si f est continue et change de signe entre deux points a et b, c'est-à-dire $f(a) \times f(b) \leq 0$, alors par le **Théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = 0$ possède *at least* une solution $c \in [a, b] \cup [b, a]$.
- Si la question est de prouver l'**existence** et l'**unicité** de la solution, le **Corollaire du TVI pour les fonctions strictement monotones** ou le théorème de la bijection bicontinue permettent en ce cas de répondre à la question :
  Si f est strictement monotone et continue sur I et vérifie $0 \in f(I)$, alors par le **Théorème de la bijection bicontinue**, 0 possède un unique antécédent par f. Autrement dit, l'équation $f(x) = 0$ possède **exactement** une solution $c \in I$.
- Si la question est de prouver qu'il existe **exactement deux solutions**, vous devrez appliquer **exactement deux fois** le corollaire du TVI pour les fonctions strictement monotones ou le Théorème de la bijection bicontinue sur des intervalles différents bien entendu !

Remarque : Vous pouvez bien entendu, résoudre plus généralement l'équation $f(x) = g(x)$ où f et g sont deux fonctions continues sur un même intervalle par ces mêmes méthodes : il suffit d'appliquer ce qui précède à la fonction $f - g$.

■■■ Comment montrer que f est bornée

D'après le théorème **image continue d'un segment**, toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est bornée, mais en plus elle possède une valeur minimale et une valeur maximale : il existe $(\alpha, \beta) \in [a, b]^2$ tels que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta).$$

Pour déterminer ses valeurs maximales et minimales, nous utiliserons les variations de f.