PROGRAMME DE COLLE S01

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

OPÉRATIONS DANS R

■■■ Sommes et produits finis

Notation : *Soit* $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *une suite de nombres réels et* $n \in \mathbf{N}$ *un entier naturel. On note*

$$S_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{0\leq k\leq n} x_k \qquad \text{et} \qquad P_n = x_0 \times x_1 \times \cdots \times x_n = \prod_{k=0}^{n} x_k = \prod_{k\in\{0,\ldots,n\}} x_k.$$

Proposition*.— Soit $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$, $(y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels et $\lambda \in \mathbf{R}$ un nombre réel. Alors pour tous entiers naturels n et m tels que $m < n$,

- **Commutativité, associatitivité, distributivité**

$$\sum_{k=0}^{n}(x_k + y_k) = \sum_{k=0}^{n} x_k + \sum_{k=0}^{n} y_k \qquad \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{m} x_k + \sum_{k=m+1}^{n} x_k \qquad \sum_{k=0}^{n}(\lambda x_k) = \lambda \times \sum_{k=0}^{n} x_k$$

- **Changements d'indice**

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{i=0}^{n} x_{n-i} \qquad \sum_{k=p}^{q} x_k = \sum_{i=0}^{q-p} x_{p+i}.$$

Théorème.— Télescopage —. Soit $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels, telles que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $x_k = a_{k+1} - a_k$. Alors, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} \left[a_{k+1} - a_k\right] = a_{n+1} - a_0.}$$

■■■ Identité géométrique et formule du binôme

Théorème.— Identité géométrique —. Soit a et b deux réels. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$,

$$\boxed{a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^{n} a^k\, b^{n-k}}$$

Corollaire.— si $a \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

Définition : *Soit* $(k,n) \in \mathbf{Z}^2$, *les* ***coefficients du binôme*** *sont définis par* $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ *si* $0 \leq k \leq n$ *et 0 sinon.*

Théorème.— Soit $(n,k) \in \mathbf{N}^2$, les coefficients du binôme vérifient

- $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\displaystyle\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$
- $\displaystyle\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Savoir-faire : la construction du triangle de **Pascal**.

Théorème.— Formule du binôme de Newton —. Soit $n \in \mathbf{N}$, et $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ un couple de réels, alors

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}}$$

RELATION D'ORDRE SUR R

▪▪▪ Valeur absolue

Définition : *Pour tout réel x, on définit la **valeur absolue** de x par :* $|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$

Proposition.— Inégalités triangulaires —. Pour tous réels x et y, on a :

$$\boxed{|x+y| \leq |x| + |y| \quad \text{et} \quad |x-y| \geq \big||x| - |y|\big|}$$

▪▪▪ Partie entière d'un réel

Définition : *Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, la **partie entière** de x, est l'unique entier relatif $n \in \mathbf{Z}$ qui vérifie l'encadrement :*

$$\boxed{n \leq x < n+1}$$

On note $\lfloor x \rfloor$ ou $\mathit{Ent}(x)$ cet entier.

Proposition.— La partie entière vérifie pour tous réels x et y, et pour tout entier $n \in \mathbf{Z}$:

- $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
- $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.
- $(x = \lfloor x \rfloor \iff x \in \mathbf{Z})$.
- $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
- **si** $x \leq y$ **alors** $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.
- **si** $x \leq n$ **alors** $\lfloor x \rfloor \leq n$.

ÉQUATIONS DANS R

▪▪▪ Équations polynomiales

Proposition.— Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ un triplet de nombres réels avec a **non nul** et considérons l'équation $ax^2+bx+c=0$. On introduit le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- si $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes dans $\mathbf{R}$: $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. De plus,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \times (x - x_2)$$

- si $\Delta = 0$, l'équation possède une racine double dans $\mathbf{R}$ $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et dans ce cas

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

- si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution dans $\mathbf{R}$.

Proposition*.— Système somme-produit
Soit $(s, p) \in \mathbf{R}^2$, un couple de réels. Les solutions du système $\begin{cases} x + y = s \\ x \times y = p \end{cases}$ sont les couples $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, où x et y sont les solutions –éventuellement confondues– de l'équation du deuxième degré $t^2 - st + p = 0$.

Savoir-faire : utiliser un système somme-produit pour trouver des racines évidentes d'un polynôme de degré 2.

▪▪▪ Systèmes d'équations linéaires

Proposition*.— L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions d'un système d'équations linéaires (S) ne change pas si l'on effectue sur les lignes les **opérations élémentaires** suivantes :

- échanger l'ordre des lignes L_i et L_j $(L_i \leftrightarrow L_j)$,
- multiplier la ligne L_i par une constante non nulle $\lambda_i \in \mathbf{K}^\star$ $(L_i \leftarrow \lambda_i\ L_i)$,
- ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j $(i \neq j)$ $(L_i \leftarrow L_i + \lambda_j L_j)$.

Savoir-faire : la résolution d'un système d'équations linéaires par la **méthode du pivot de Gauss**.