Proposition*.— formules de trigonométrie —. Formules d'addition, de duplication, de transformation de produit en somme , de sommes en produit (cf **programme de S01bis**)

Savoir-faire.— linéariser un produit de fonctions trigonométriques et l'opération inverse en utilisant les formules de trigo **et** en utilisant les **formules d'Euler, Moivre** et **Newton**.

■ ■ ■ Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

Proposition.— Soit $z \in \mathbf{C}^\star$ un nombre complexe non nul. Il **existe** un couple de réels $(\rho, \theta) \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R}$ tel que

$$\boxed{z = \rho e^{i\theta} = \rho\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)}$$

Cette écriture est appelée **forme exponentielle ou trigonométrique** du nombre complexe non nul z.

Définition : *Si $z \in \mathbf{C}^\star$, s'écrit $z = \rho e^{i\theta}$, nécessairement $\rho = |z|$. On appelle **un argument** de z, et on note $\arg(z)$ tout nombre réel tel que $z = |z|e^{i\ \arg(z)}$.*

Théorème*.— Pour tout couple $(z, z') \in \mathbf{C}^\star \times \mathbf{C}^\star$ de nombres complexes non nuls :

$$\boxed{\left((z = z') \iff \left\{\begin{array}{lrcl} \bullet & |z| & = & |z'| \\ \bullet & \arg(z) & \equiv & \arg(z')\,[2\pi] \end{array}\right.\right)}$$

Illustration :interprétation géométrique de la multiplication des nombres complexes.

Définition : *Soit $z = x + iy$ en notation algébrique. On définit l'**exponentielle de** z par $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\big(\cos y + i\sin y\big)$.*

■ ■ ■ Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

Théorème.— Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Notons $\omega_n = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. L'ensemble $\mathbf{U}_n$ des **racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité** est :

$$\boxed{\mathbf{U}_n = \{\omega_n^k;\ k \in \mathbf{Z}\} = \{1, \omega_n, \ldots, \omega_n^{n-1}\}}$$

Illustration :représentation des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1.

Théorème.— Racines $n^{\text{ièmes}}$ de a —. Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ et $a \in \mathbf{C}^\star$. On note $\omega_n = \exp(\frac{2i\pi}{n})$. Soit ζ_0 une solution *particulière* de l'équation $z^n = a$, par exemple $\zeta_0 = \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\frac{\arg a}{n}}$. Alors

$$\boxed{\mathscr{S} = \{\zeta_0,\ \zeta_0\,\omega_n,\ \zeta_0\,\omega_n^2, \ldots,\ \zeta_0\,\omega_n^{n-1}\} = \{\ \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\ \frac{\arg a}{n}},\ \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\ \frac{\arg a + 2\pi}{n}},\ \ \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\ \frac{\arg a + 4\pi}{n}}, \ldots,\ \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\ \frac{\arg a + 2(n-1)\pi}{n}}\}}$$

Autrement dit, on obtient **toutes** les racines $n^{\text{ièmes}}$ de $a \in \mathbf{C}^\star$ en multipliant l'**une** d'entre elles par **toutes** les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Savoir-faire.— calcul des racines carrées en notation algébrique.

■ ■ ■ Application aux équations polynomiales

Proposition.— Soit $a \in \mathbf{C}^\star$, b, et $c \in \mathbf{C}$. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ et désignons par δ l'une des racines carrées (complexes) de Δ. Alors l'équation du deuxième degré $az^2 + bz + c = 0$ possède deux solutions (distinctes ou confondues) qui sont données par :

$$\boxed{z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}}$$

De plus, pour tout $z \in \mathbf{C}$, nous avons la factorisation : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Corollaire.— Somme et produit des racines —. Soit $a \in \mathbf{C}^\star$, b, et $c \in \mathbf{C}$. Les racines z_1, z_2 distinctes ou confondues de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ vérifient $\left\{\begin{array}{l} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 \times z_2 = \ \ \frac{c}{a} \end{array}\right.$.

Savoir-faire.— Pour les équation polynomiales de degré supérieur à 3,

- trouver une solution particulière (évidente ou en suivant les indications de l'énoncé),
- effectuer un changement d'inconnue pour se ramener à une équation de plus bas degré

PROGRAMME DE COLLE S03

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

FONCTIONS NUMÉRIQUES : GÉNÉRALITÉS

Fonctions monotones

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction réelle. On dit que f est*

- ***croissante** sur I si pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$, la relation $x_1 \leq x_2$ entraîne $f(x_1) \leq f(x_2)$.*
- ***décroissante** sur I si pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$, la relation $x_1 \leq x_2$ entraîne $f(x_1) \geq f(x_2)$.*
- ***strictement croissante** sur I si pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$, la relation $x_1 < x_2$ entraîne $f(x_1) < f(x_2)$.*
- ***strictement décroissante** sur I si pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$, la relation $x_1 < x_2$ entraîne $f(x_1) > f(x_2)$.*

Définition : *Une fonction est dite **monotone** si elle est croissante ou décroissante sur I, elle est dite **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.*

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition : *Soit $f : I \to J$ une fonction définie sur un intervalle I, à valeurs dans J. f est dite :*

- ***injective** si tout élément y de J a au plus un antécédent dans I.*
- ***surjective** si tout élément y de J a au moins un antécédent dans I.*
- ***bijective** si tout élément y de J a exactement un antécédent dans I.*

Proposition.— Point de vue équations —. Soit $f : I \to J$ une application. On considère pour $y \in J$ l'équation d'inconnue $x \in I$

$$f(x) = y \qquad (1)$$

f est bijective *ssi* pour tout $y \in F$, l'équation (1) admet une unique solution dans I.

Définition : *Soit $f : I \to J$ une **bijection**. On définit une nouvelle application $f^{-1} : J \to I$, appelée **application réciproque** de f, en posant pour tout $y \in J$, $f^{-1}(y) = x$ où x est l'unique antécédent de y par f.*

Corollaire.— Soit $f : I \to J$ une **bijection**. Pour tout couple $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$,

$$\begin{cases} \bullet\ x \in I \\ \bullet\ y = f(x) \end{cases} \iff \begin{cases} \bullet\ y \in J \\ \bullet\ x = f^{-1}(y) \end{cases}$$

Savoir-faire : résoudre et discuter suivant la valeur de $y \in J$ l'équation $y = f(x)$ pour établir l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité de f, et le cas échéant, déterminer l'application réciproque de f.

Proposition.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ alors

- f est strictement croissante *si et seulement si* f est croissante et injective.
- f est strictement décroissante *si et seulement si* f est décroissante et injective.

Limites

Théorème*.— Opérations algébriques sur des fonctions admettant une limite —. Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$, a un élt de I ou une extrémité de I, $\ell, k \in \bar{\mathbf{R}}$, et $\lambda \in \mathbf{R}^\star$ un nombre réel. On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = k$. Alors

- $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |\ell|$.
- $\lim\limits_{x \to a} (\lambda f(x)) = \lambda\, \ell$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) = \ell + k$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) \times g(x) = \ell \times k$
- si $\ell \neq 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$
- si $k \neq 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{k}$

pourvu que ces opérations aient un sens dans $\bar{\mathbf{R}}$.

Proposition*.— Composition des limites —. Soit $f : J \to \mathbf{R}$ et $y : I \to J$, a (resp. b) un élément de I (resp J) ou une extrémité de I (resp. J) et $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$.

$$\textbf{Si} \quad \left.\begin{matrix} \bullet\ \lim\limits_{x \to a} y(x) = b \\ \bullet\ \lim\limits_{y \to b} f(y) = \ell \end{matrix}\right) \quad \textbf{alors} \quad \lim\limits_{x \to a} f \circ y(x) = \ell$$