Chapitre 22

Dimension finie

Sommaire

OBJECTIFS

A la fin du chapitre vous devez connaître parfaitement les théorèmes fondamentaux :

- ▷ **Théorème de la base incomplète**
- ▷ **Théorème de la dimension**,
- ▷ **Formule du rang**

et savoir utiliser la dimension pour

- ▷ démontrer qu'une famille de vecteurs est une base
- ▷ démontrer que deux sous-espaces sont supplémentaires
- ▷ démontrer qu'une application linéaire est un isomorphisme d'espaces vectoriels

Introduction

Un espace vectoriel $(E,+,\cdot)$ est dit de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice **finie** $\mathcal{G}=(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$, c'est-à-dire si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des $\vec{u}_i$.
Ainsi, en dimension finie tout vecteur peut être entièrement décrit par un nombre fini de paramètres. Le nombre minimal de ces paramètres est la **dimension** de E.

Ce chapitre présente les résultats fondamentaux sur les espaces vectoriels de dimension finie :

- **Théorème de la base incomplète**
- **Théorème de la dimension**,
- **Formule du rang**

Ces résultats plutôt théoriques seront complétés au chapitre suivant dans lequel seront introduits les outils pratiques pour l'étude des espaces vectoriels de dimension finie, prinicipalement à l'aide de la représentation matricielle.

I Espaces vectoriels de dimension finie

1 Définitions-exemples

Définition : *Un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est dit de **type fini** s'il possède une famille génératrice finie, i.e.*

Il existe une famille finie $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ de vecteurs de E tels que

$$\boxed{E=\mathsf{Vect}\,(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n)}$$

Vocabulaire : *lorsqu'on aura introduit la dimension, on dira plutôt que E est de dimension finie à la place de E est de type finie.*

Remarque : la propriété de type fini est une propriété *existentielle.* On ne sera pas surpris de la quantité de résultats de type existentiel dans ce chapitre.

Exemples :

1. $\mathbf{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\mathbf{K}_n[X]$ sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de type fini.
2. En revanche, $\mathbf{K}[X]$ n'est pas de type fini.

2 Existence de bases

Le théorème qui suit est tout à fait central dans notre approche puisqu'il a motivé la notion de famille libre au **Chapitre 23** :
Partant d'une famille génératrice finie d'un espace vectoriel de type fini, on lui retire *un à un* les vecteurs qui sont combinaisons linéaires des autres. D'après la **Proposition** 20.19, le caractère générateur des sous-familles ainsi obtenues est préservé.
A la fin de ce processus, nous avons extrait de la famille génératrice une sous-famille génératrice et sans relations de dépendance : elle est donc *à la fois* libre et génératrice, c'est une base !

Proposition 22.1.— Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{\vec{0}\}$ de type fini sur $\mathbf{K}$. Soient

- $\mathcal{L}$ une famille **libre** et finie de vecteurs de E
- $\mathcal{G}$ une famille **génératrice** et finie de vecteurs de E.

On suppose que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{G}$. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de vecteurs de E telle que

$$\boxed{\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}}$$

Remarque : le processus décrit à la page précédente constitue l'ébauche d'une démonstration. Partant de $\mathcal{G}$ on extrait une base. La démonstration ci-dessous procède à rebours : partant d'une famille libre, on la complète en une base.

Démonstration $\triangledown$

Soit $\mathcal{G} = (\vec{u}_i,\ 1 \leq i \leq m)$ une famille génératrice finie et $\mathcal{L} = (\vec{u}_i,\ 1 \leq i \leq p)$, avec $p \leq m$ une sous-famille libre de $\mathcal{G}$. Considérons l'ensemble des familles $\mathscr{F}$ telles que

$$\mathscr{F} \text{ est libre et vérifie } \mathcal{L} \subset \mathscr{F} \subset \mathcal{G}.$$

De telles familles existent puisque, par exemple, $\mathcal{L}$ elle-même vérifie ces conditions. De plus, il n'existe qu'un nombre fini de telles sous-familles de $\mathcal{G}$ puisque $\mathcal{G}$ est finie.

Considérons alors une telle sous-famille $\mathcal{B}$ de $\mathcal{G}$ libre et **de cardinal maximal**. Quitte à réindexer les familles $\mathcal{L}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{G}$, supposons sans perte de généralité que $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$, avec $p \leq n \leq m$. Montrons que $\mathcal{B}$ est une base. Comme par construction $\mathcal{B}$ est libre, il suffit de prouver que $\mathcal{B}$ est génératrice, *i.e.* $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{B}) = E$.

- si $\vec{u} \in \mathcal{B}$, alors $\vec{u} \in \mathsf{Vect}\,(\mathcal{B})$.
- si $\vec{u} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{B}$, montrons que $\vec{u} \in \mathsf{Vect}\,(\mathcal{B})$.
  Pour cela, considérons la famille $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p, \vec{u})$. Il est clair que $\mathcal{L} \subseteq \mathscr{F} \subseteq \mathcal{G}$. Comme $\mathsf{Card}\ \mathscr{F} = \mathsf{Card}\ \mathcal{B} + 1 > \mathsf{Card}\ \mathcal{B}$, il en résulte que $\mathscr{F}$ ne saurait être libre. En conséquence, il existe une combinaison linéaire nulle et non triviale des vecteurs de $\mathscr{F}$:
  Il existe $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ **non tous nuls** tels que

  $$\lambda \cdot \vec{u} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{u}_i = \vec{0}_E$$

  Comme par hypothèse $\mathcal{L}$ est libre, λ ne peut être nul. En conséquence, la combinaison linéaire ci-dessus peut s'écrire :

  $$\vec{u} = \frac{-1}{\lambda} \cdot \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot \vec{u}_i \right)$$

  ce qui prouve que $\vec{u} \in \mathsf{Vect}\,(\mathcal{B})$.

Ainsi, nous venons de prouver que le sous-espace vectoriel $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{B})$ contient $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G} \subset \mathsf{Vect}\,(\mathcal{B})$$

Par conséquent, $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{B})$ contient le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{G}$ à savoir $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{G})$.

$$\mathsf{Vect}\,(\mathcal{G}) \subset \mathsf{Vect}\,(\mathcal{B})$$

Comme par hypothèse $\mathcal{G}$ est génératrice de E, $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{G})$ est E tout entier. Par suite,

$$\mathsf{Vect}\,(\mathcal{B}) = E,$$

ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est génératrice. ▲

Théorème 22.2.— Théorème de la base incomplète
Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{\vec{0}\}$ de type fini sur $\mathbf{K}$. Alors :

- Toute famille libre finie $\mathcal{L}$ de vecteurs de E peut être complétée en une base de E.
- De toute famille génératrice finie $\mathcal{G}$ de E, on peut extraire une base.

Démonstration ▽

- Par hypothèse, E est de type fini. Il possède donc une famille génératrice finie $\mathcal{G}$. Il suffit alors d'appliquer la **Proposition** 22.1 aux familles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.
- Il suffit d'appliquer la **Proposition** 22.1 aux familles $\mathcal{L} = \emptyset$ et $\mathcal{G}$.

▲

Corollaire 22.3.— Existence de bases en dimension finie
Un espace vectoriel de type fini possède une base.

Démonstration ▽
Par définition, un espace vectoriel de type fini possède une famille génératrice finie. D'après le corollaire précédent, on peut en extraire une base. ▲

Remarque : Cette propriété subsiste dans le cas où E n'est pas de type fini. Dans ce contexte plus général, la démonstration n'est pas *constructive*, mais provient d'un théorème existentiel difficile appelé le **Lemme de Zorn**.

Exercice : Soient $\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3; \vec{u}_4$, les vecteurs de $\mathbf{R}^4$ définis par

$$\vec{u}_1 = (1, 0, 1, 3)\ ,\ \vec{u}_2 = (-1, 2, 3, 4)\ ,\ \vec{u}_3 = (3, -2, -1, 2)\ ,\ \vec{u}_4 = (4, -2, 0, 5).$$

Soit $F = \mathsf{Vect}(\vec{u}_i)$ le sous-espace de $\mathbf{R}^4$ engendré par $\mathscr{F} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3; \vec{u}_4)$.
Trouvez une base de F, extraite de $\mathscr{F}$.

Solution ▽
Commençons par déterminer les relations liant les vecteurs $\vec{u}_1 \dots \vec{u}_4$, c'est-à-dire l'ensemble des 4-uplets $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ tels que

$$\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{u}_3 + \lambda_4 \cdot \vec{u}_4 = \vec{0} \tag{22.1}$$

Cette équation vectorielle se traduit par le système d'équations linéaires homogène :

$$(22.1) \iff \left\{\begin{array}{rrrrl} \lambda_1 & -\lambda_2 & +3\lambda_3 & +4\lambda_4 & = 0 \\ & 2\lambda_2 & -2\lambda_3 & -2\lambda_4 & = 0 \\ \lambda_1 & +3\lambda_2 & -\lambda_3 & & = 0 \\ 3\lambda_1 & +4\lambda_2 & +2\lambda_3 & +5\lambda_4 & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrl} \lambda_1 & -\lambda_2 & +3\lambda_3 & +4\lambda_4 & = 0 \\ & 2\lambda_2 & -2\lambda_3 & -2\lambda_4 & = 0 \\ & 4\lambda_2 & -4\lambda_3 & -4\lambda_4 & = 0 \\ & 7\lambda_2 & -7\lambda_3 & -7\lambda_4 & = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrl} \boxed{1}\lambda_1 & -\lambda_2 & +3\lambda_3 & +4\lambda_4 & = 0 \\ & \boxed{1}\lambda_2 & -\lambda_3 & -\lambda_4 & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = -2\lambda_3 - 3\lambda_4 \\ \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions de (22.1) *est donc*

$$\left\{(-2\lambda_3 - 3\lambda_4; \lambda_3 + \lambda_4; \lambda_3; \lambda_4);\ (\lambda_3; \lambda_4) \in \mathbf{R}^2\right\} = \mathsf{Vect}\left\{(-2; 1; 1; 0); (-3; 1; 0; 1)\right\}.$$

En particulier, $\vec{u}_3 = 2 \cdot \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ et $\vec{u}_4 = 3\vec{u}_1 - \vec{u}_2$. Ainsi, $\vec{u}_3$ et $\vec{u}_4$ sont combinaisons linéaires de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ et par conséquent, $F = \mathsf{Vect}\{\vec{u}_1; \vec{u}_2\}$.
Comme de plus $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires, cette sous-famille de $\mathcal{F}$ est libre. Il s'agit donc d'une base de F extraite de $\mathcal{F}$. ▲

3 Dimension

Nous venons de démontrer qu'un espace vectoriel de type fini possède (au moins) une base. En fait, si E n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$, il admet une infinité de bases. Le point délicat de la théorie est de démontrer que *toutes ses bases ont le même nombre de vecteurs.* C'est le :

Théorème 22.4.— Théorème de la dimension
Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{\vec{0}\}$ de type fini sur $\mathbf{K}$. Alors

$$\boxed{\text{Toutes les bases de } E \text{ ont même cardinal.}}$$

Définition : *Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{\vec{0}\}$ de type fini sur $\mathbf{K}$.*
*Si toutes les bases de E ont pour cardinal $n \in \mathbf{N}^\star$, n est appelé la **dimension de** E. On note*

$$\boxed{n = \dim_{\mathbf{K}} E}$$

On convient que l'espace vectoriel réduit à $\vec{0}$ est de dimension 0.

Vocabulaire : *si E est de type fini, on préfère dire que E **est de dimension finie**. Dans le cas où E n'est pas de type fini, on dit que E est de dimension infinie.*

Commentaires : la dimension d'un espace vectoriel de type fini, représente le nombre minimal de paramètres nécessaires pour décrire tout vecteur de E.

Démonstration $\triangledown$
Considérons $\mathscr{E} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ et $\mathcal{E} = (\vec{\epsilon}_1, \ldots, \vec{\epsilon}_p)$ deux bases de E. Montrons que $n = p$. Pour cela, il suffit par symétrie, de prouver que $n \geq p$.
Utilisons le fait que $\mathscr{E}$ **est génératrice** et $\mathcal{E}$ **est libre** :

Comme $\mathscr{E}$ **est génératrice**, tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison linéaire des $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$. En particulier, les vecteurs $\vec{\epsilon}_1, \ldots, \vec{\epsilon}_p$ sont combinaison linéaire des $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$. Il existe donc une famille $(\lambda_{i,j})$ de scalaires tels que

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_{1,1} \cdot \vec{e}_1 & + & \lambda_{1,2} \cdot \vec{e}_2 & + & \cdots & + & \lambda_{1,n} \cdot \vec{e}_n & = & \vec{\epsilon}_1 \\
\lambda_{2,1} \cdot \vec{e}_1 & + & \lambda_{2,2} \cdot \vec{e}_2 & + & \cdots & + & \lambda_{2,n} \cdot \vec{e}_n & = & \vec{\epsilon}_2 \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\
\lambda_{p,1} \cdot \vec{e}_1 & + & \lambda_{p,2} \cdot \vec{e}_2 & + & \cdots & + & \lambda_{p,n} \cdot \vec{e}_n & = & \vec{\epsilon}_p
\end{array}\right.$$

Comme par hypothèse, $\mathcal{E}$ **est libre**, en particulier $\vec{\epsilon}_1 \neq \vec{0}_E$. Par conséquent, les coefficients de la première ligne sont non tous nuls. Quitte à permuter deux colonnes, supposons sans perte de généralité que $\lambda_{1,1}$ est non nul.
Comme dans l'algorithme de Gauss, utilisons $\lambda_{1,1}$ comme pivot :
Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - \frac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{1,1}} L_1$ pour $i \in [\![2, p]\!]$, montrent l'existence d'une famille de scalaires, notée encore $(\lambda_{i,j})$ telle que

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
\boxed{\lambda_{1,1}} \cdot \vec{e}_1 & + & \lambda_{1,2} \cdot \vec{e}_2 & + & \cdots & + & \lambda_{1,n} \cdot \vec{e}_n & = & \vec{\epsilon}_1 \\
\vec{0} & + & \lambda_{2,2} \cdot \vec{e}_2 & + & \cdots & + & \lambda_{2,n} \cdot \vec{e}_n & = & \vec{\epsilon}_2 - c_2 \cdot \vec{\epsilon}_1 \\
 & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\
\vec{0} & + & \lambda_{p,2} \cdot \vec{e}_2 & + & \cdots & + & \lambda_{p,n} \cdot \vec{e}_n & = & \vec{\epsilon}_p - c_p \cdot \vec{\epsilon}_1
\end{array}\right.$$

Comme la famille $\mathcal{E}$ **est libre**, la combinaison linéaire *non triviale* $1 \cdot \vec{\epsilon}_2 - c_2 \cdot \vec{\epsilon}_1$ n'est *pas nulle*. Par suite, les coefficients de la deuxième ligne sont non tous nuls. Quitte à permuter deux colonnes, supposons sans perte de généralité que $\lambda_{2,2}$ est non nul.
Il existe donc une nouvelle famille de scalaires, notée encore $(\lambda_{i,j})$ telle que

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
\boxed{\lambda_{1,1}} \cdot \vec{e}_1 & + & \lambda_{1,2} \cdot \vec{e}_2 & + & \cdots & + & \lambda_{1,n} \cdot \vec{e}_n & = & \vec{\epsilon}_1 \\
 & & \boxed{\lambda_{2,2}} \cdot \vec{e}_2 & + & \cdots & + & \lambda_{2,n} \cdot \vec{e}_n & = & \vec{\epsilon}_2 - c_2 \cdot \vec{\epsilon}_1 \\
 & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\
 & & \lambda_{p,2} \cdot \vec{e}_2 & + & \cdots & + & \lambda_{p,n} \cdot \vec{e}_n & = & \vec{\epsilon}_p - c_p \cdot \vec{\epsilon}_1
\end{array}\right.$$

Grâce au pivot $\lambda_{2,2}$, nous pouvons, par opérations élémentaires, éliminer $\vec{e}_2$ des lignes d'indice supérieur à 3.
Le processus *à la* Gauss se poursuit : les combinaisons linéaires apparaissant successivement au *second membre* sont toutes de la forme

$$\vec{\epsilon}_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_i \cdot \vec{\epsilon}_j = \vec{\epsilon}_i - CL(\vec{\epsilon}_1, \ldots, \vec{\epsilon}_{i-1}).$$

En particulier, elles ont des coefficients *non tous nuls* (le coefficient de $\vec{\epsilon}_i$ est 1). Comme par hypothèse, la famille $\mathcal{E}$ **est libre**, les seconds membres sont donc non nuls. Il s'ensuit que les coefficients (*membre de gauche*) de chacune des lignes sont non tous nuls ce qui garantit à chaque étape, l'existence d'un pivot dans la $i^{\text{ième}}$ ligne.

A la fin de ce processus gaussien, nous obtenons un système échelonné. Plus précisément, deux issues sont possibles *a priori* :

- **ou bien $n \geq p$** et dans ce cas, nous obtenons l'existence d'une famille de scalaires $(\lambda_{i,j})$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \boxed{\lambda_{1,1}} \cdot \vec{e}_1 & + & \lambda_{1,2} \cdot \vec{e}_2 & + & \cdots & + & \lambda_{1,p} \cdot \vec{e}_p + \cdots + \lambda_{1,n} \cdot \vec{e}_n & = & \vec{\epsilon}_1 \\ & & \boxed{\lambda_{2,2}} \cdot \vec{e}_2 & + & \cdots & + & \lambda_{2,p} \cdot \vec{e}_p + \cdots + \lambda_{2,n} \cdot \vec{e}_n & = & \vec{\epsilon}_2 - c_2 \cdot \vec{\epsilon}_1 \\ & & & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & & & \boxed{\lambda_{p,p}} \cdot \vec{e}_p + \cdots + \lambda_{p,n} \cdot \vec{e}_n & = & \vec{\epsilon}_p - CL(\vec{\epsilon}_1, \ldots, \vec{\epsilon}_{p-1}) \end{array}\right.$$

- **ou bien $n < p$** et dans ce cas, nous obtenons l'existence d'une famille de scalaires $(\lambda_{i,j})$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \boxed{\lambda_{1,1}} \cdot \vec{e}_1 & + & \lambda_{1,2} \cdot \vec{e}_2 & + & \cdots & + & \lambda_{1,n} \cdot \vec{e}_n & = & \vec{\epsilon}_1 \\ & & \boxed{\lambda_{2,2}} \cdot \vec{e}_2 & + & \cdots & + & \lambda_{2,n} \cdot \vec{e}_n & = & \vec{\epsilon}_2 - c_2 \cdot \vec{\epsilon}_1 \\ & & & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & & & \boxed{\lambda_{n,n}} \cdot \vec{e}_n & = & \vec{\epsilon}_n - CL(\vec{\epsilon}_1, \ldots, \vec{\epsilon}_{n-1}) \\ & & & & & & \vec{0} & = & \vec{\epsilon}_{n+1} - CL(\vec{\epsilon}_1, \ldots, \vec{\epsilon}_n) \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \vec{0} & = & \vec{\epsilon}_p - CL(\vec{\epsilon}_1, \ldots, \vec{\epsilon}_{p-1}) \end{array}\right.$$

Dans le second cas, en considérant la dernière ligne du système, nous obtenons $\vec{\epsilon}_p$ comme combinaison linéaire de $\vec{\epsilon}_1, \ldots, \vec{\epsilon}_{p-1}$, ce qui est impossible puisque par hypothèse la famille $\mathcal{E}$ **est libre**. Par conséquent, **ce deuxième cas est exclu** ce qui prouve que nécessairement $n \geq p$.

De même, en utilisant cette fois le fait que $\mathcal{E}$ est génératrice et que $\mathscr{E}$ est libre, nous obtenons que $p \geq n$. ▲

Corollaire 22.5.— Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension finie n.

- si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\mathcal{F}$ est finie et Card $(\mathcal{F}) \leq n$.
- si $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $\mathcal{F}$ est infinie ou Card $(\mathcal{F}) \geq n$.

Commentaires : en dimension finie le cardinal des familles libres (*resp.* génératrices) est toujours inférieur (*resp.* supérieur) à la dimension de l'espace.

Démonstration ▽

- la preuve sera par l'absurde : supposons *au contraire* que $\mathscr{F}$ est libre et infinie, ou finie mais de cardinal strictement supérieur à n. Dans les deux cas, il existe une famille finie et libre $\mathcal{L}$ de cardinal strictement supérieur à n. D'après le **Théorème** 22.2, $\mathcal{L}$ se complète en une base $\mathcal{B}$ de E. On a alors Card $\mathcal{B} > n$, ce qui *contredit* le **théorème de la dimension**.
- si $\mathscr{F}$ est infinie, il n'y a rien à prouver. Supposons que $\mathscr{F}$ soit une famille génératrice finie. Appliquons le **Théorème** 22.2 pour extraire une base $\mathcal{B}$ de $\mathscr{F}$. On a clairement Card $\mathscr{F} \geq$ Card $\mathcal{B} = n$. ▲

4 Exemple fondamental

La base canonique de $\mathbf{K}^n$ possède n éléments $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, où pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\vec{e}_k$ est le vecteur de $\mathbf{K}^n$ défini par : $\vec{e}_k = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k^{\text{ième}}\ rang}, 0, \ldots, 0)$.

D'après le **théorème de la dimension**, il en résulte que toute base de $\mathbf{K}^n$ est de cardinal n et que $\mathbf{K}^n$ est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbf{K}$:

Proposition 22.6.— Soit $n \in \mathbf{N}$. $\mathbf{K}^n$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{K}$ et

$$\boxed{\dim_{\mathbf{K}} \mathbf{K}^n = n}$$

Le point remarquable, c'est qu'il s'agit du seul espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbf{K}$ à isomorphisme près. Plus précisément :

Théorème 22.7.— Soient E un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ et $n \in \mathbf{N}^\star$. Alors

E est de dimension finie n *si et seulement si* E est isomorphe à $\mathbf{K}^n$.

Commentaires : comme le montre la démonstration qui suit, le choix d'une base $\mathcal{E} = (\vec{\epsilon}_1, \dots, \vec{\epsilon}_n)$ de E permet d'identifier E et $\mathbf{K}^n$ au moyen de l'isomorphisme d'espaces vectoriels $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \to & E \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^n x_i \cdot \vec{\epsilon}_i \end{array}$

- comme $\mathcal{E}$ est libre, Φ est injectif,
- comme $\mathcal{E}$ est génératrice, Φ est surjectif.

Démonstration $\triangledown$

La condition est nécessaire : supposons que E soit de dimension finie n et construisons un isomorphisme Φ de $\mathbf{K}^n$ sur E :
Pour cela, considérons une base $(\vec{\epsilon}_1, \dots, \vec{\epsilon}_n)$ de E dont l'existence est garantie par le **Corollaire** 22.3. Comme une application linéaire est entièrement caractérisée par la donnée des images d'une base, il existe une application linéaire $\Phi : \mathbf{K}^n \to E$, unique, telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \Phi(\vec{e}_i) = \vec{\epsilon}_i$$

De plus, comme Φ transforme une base de $\mathbf{K}^n$ en une base de E, il s'agit d'après la **Proposition** 21.17 d'un isomorphisme de $\mathbf{K}^n$ sur $\mathcal{E}$.
La condition est suffisante : supposons qu'il existe un isomorphisme Φ de $\mathbf{K}^n$ sur E. Montrons que E est de dimension finie n.
Pour cela, considérons la base canonique $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ de $\mathbf{K}^n$ et définissons pour i variant de 1 à n

$$\vec{\epsilon}_i = \Phi(\vec{e}_i)$$

Comme Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, $(\vec{\epsilon}_1, \dots, \vec{\epsilon}_n)$ est une base de E, d'après le **Théorème** 21.17. Par conséquent, E possède une base de cardinal n. C'est donc un espace vectoriel de dimension n. ▲

Corollaire 22.8.— Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbf{K}$. Alors

$$\boxed{E \cong F \iff \dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{K}} F}$$

i.e. E et F sont isomorphes *si et seulement si* ils ont même dimension.

Notation : *dans l'énoncé ci-dessus, $E \cong F$ signifie E isomorphe à F.*

Remarque : En particulier, notez que $\mathbf{K}^n \cong \mathbf{K}^p \iff n = p$.

Démonstration $\triangledown$
Soient E et F deux $\mathbf{K}$ espaces vectoriels de dimensions finies n et p respectivement, et $(\vec{\epsilon}_1, \dots, \vec{\epsilon}_n)$ une base de E.

- ► Si $n = p$, alors, d'après le **Théorème** 22.7, E et F sont tous deux isomorphes à $\mathbf{K}^n$. La composée de deux isomorphismes étant un isomorphisme, il en résulte que $E \cong F$.
- ► Réciproquement, si E et F sont isomorphes, il existe $\Phi : E \to F$ un isomorphisme d'espaces vectoriels. D'après le **Théorème** 21.17, la famille $\Phi(\vec{\epsilon}_1), \dots, \Phi(\vec{\epsilon}_n)$ est une base de F. Ainsi

  - $\mathrm{Card}\ \{\Phi(\vec{\epsilon}_1), \dots, \Phi(\vec{\epsilon}_n)\} = n$ car Φ est bijectif
  - $\mathrm{Card}\ \{\Phi(\vec{\epsilon}_1), \dots, \Phi(\vec{\epsilon}_n)\} = p$ car toute base de F a pour cardinal p

  Par conséquent, $n = p$. ▲

5 Exemples d'espaces vectoriels de dimension finie

5.a Espaces de polynômes

Un polynôme à coefficients dans **K** de degré inférieur où égal à n s'écrit :

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n.$$

Il est donc entièrement et uniquement déterminé par ses $n+1$ coefficients $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$. De fait :

Proposition 22.9.— Soit $n \in \mathbf{N}$. $\mathbf{K}_n[X]$ est un **K**-espace vectoriel de dimension finie sur **K** et

$$\dim_{\mathbf{K}} \mathbf{K}_n[X] = n+1.$$

Démonstration ▽
En effet, la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbf{K}_n[X]$ compte $n+1$ vecteurs. ▲

Exercice : Montrez que $\mathbf{K}[X]$ est de dimension infinie.

Solution ▽
Montrons qu'aucune famille $\mathscr{F} = (P_0, \dots, P_n)$ finie de polynômes n'engendre $\mathbf{K}[X]$.
En effet, si $\mathscr{F} = (P_0, \dots, P_n)$ est une famille finie de polynômes, notons $m = \max\{d^\circ P_k;\ 0 \le k \le n\}$, de sorte que $P_0, \dots, P_n \in \mathbf{K}_m[X]$. Comme $\mathbf{K}_m[X]$ est stable par combinaison linéaire, il en résulte

$$\mathrm{Vect}\,\{P_0, \dots, P_n\} \subset \mathbf{K}_m[X].$$

En particulier, $\mathscr{F}$ n'engendre pas $\mathbf{K}[X]$. ▲

5.b Espaces de matrices

Proposition 22.10.— Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^\star \times \mathbf{N}^\star$.

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$est un **K**-espace vectoriel de dimension finie et, $\dim_{\mathbf{K}} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) = np$.
- $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ est un **K**-espace vectoriel de dimension finie et, $\dim_{\mathbf{K}} \mathcal{A}_n(\mathbf{K}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
- $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ est un **K**-espace vectoriel de dimension finie et, $\dim_{\mathbf{K}} \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Notation : $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ *et* $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ *désignent respectivement les ensembles des matrices carrées d'ordre n antisymétriques et symétriques.*

Démonstration ▽

- Une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ étant entièrement et uniquement déterminée par la donnée de ses $n \times p$ coefficients, nous construisons sa *base canonique* comme suit :
  Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, la matrice $E_{i,j}$ a tous ses coefficients nuls sauf le coefficient de la $i^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne qui vaut 1. Ainsi, toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des $E_{i,j}$:

  $$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \cdot E_{i,j}$$

  D'après la **caractérisation des bases** (**Théorème** 20.21), la famille $(E_{i,j};\ (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!])$ forme une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, appelée **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Par conséquent, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est un **K**-espace vectoriel de dimension finie $n \times p$ sur **K**.
- En particulier, $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ est un espace vectoriel de dimension n^2 sur **K**. Une matrice antisymétrique $A \in \mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ vérifie $a_{i,i} = 0$ et pour tout i strictement supérieur à j, $a_{i,j} = -a_{j,i}$. Par conséquent, A peut se décomposer

sous la forme :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{1\le i<j\le n} a_{i,j}E_{i,j} + \sum_{i=j} a_{i,j}E_{i,j} + \sum_{1\le i>j\le n} a_{i,j}E_{i,j} \\ &= \sum_{1\le i<j\le n} a_{i,j}E_{i,j} - \sum_{1\le j<i\le n} a_{j,i},E_{i,j} \\ &= \sum_{1\le i<j\le n} a_{i,j}E_{i,j} - \sum_{1\le i<j\le n} a_{i,j}E_{j,i} \\ &= \sum_{1\le i<j\le n} a_{i,j}\big(E_{i,j} - E_{j,i}\big) \end{aligned}$$

Cette décomposition étant unique, la famille de matrices $\big(E_{i,j} - E_{j,i}\big)_{(i,j)\ t\ q\ i>j}$ forme une base de $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$. Comme $\mathsf{Card}\ \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid i<j\} = \dfrac{n\,(n-1)}{2}$, $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ de dimension finie $\dfrac{n\,(n-1)}{2}$.

- De façon analogue, une matrice symétrique S peut se décomposer sous la forme

$$S = \sum_{i=j} a_{i,j}E_{i,j} + \sum_{1\le i<j\le n} a_{i,j}\big(E_{i,j} + E_{j,i}\big)$$

Par conséquent $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $\dfrac{n(n+1)}{2}$. ▲

Exercice : $\mathbf{C}$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur $\mathbf{C}$. Montrez que $\mathbf{C}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbf{R}$.

5.c Espaces de suites, de fonctions

Proposition 22.11.— Soit $(a,b) \in \mathbf{K}^2$, on note $\mathscr{E}_{a,b}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Alors $\mathscr{E}_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^N$ de dimension 2 sur $\mathbf{K}$.

Démonstration ▽
Notons (EC), l'équation caractéristique de $\mathscr{E}_{a,b}$:

$$(EC) \qquad\qquad r^2 = ar + b$$

Discutons suivant que le corps de base est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

- si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, il convient de distinguer deux cas :
  - si (EC) admet deux racines distinctes : $(r_1, r_2) \in \mathbf{C}^2$. En ce cas, nous savons d'après le **Théorème** 12.18, que pour toute suite $u \in \mathscr{E}_{a,b}$, il existe un couple $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{C}^2$ unique tel que

    $$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \lambda_1\, r_1^n + \lambda_2\, r_2^n$$

    En d'autres termes (**caractérisation des bases**) les suites géométriques $(r_1^n)_n$ et $(r_2^n)_n$ forment une base de $\mathscr{E}_{a,b}$. En particulier, $\mathscr{E}_{a,b}$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension 2.
  - si (EC) admet une racine double $r_0 \in \mathbf{C}$. En ce cas, toute suite $u \in \mathscr{E}_{a,b}$, s'écrit de manière unique sous la forme

    $$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \lambda_1\, r_0^n + \lambda_2\, n\, r_0^n$$

    Là encore, la caractérisation des bases montre que les suites $(r_0^n)_n$ et $(nr_0^n)_n$ forment une base de $\mathscr{E}_{a,b}$. Il s'agit donc d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension 2.
- si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, trois cas se présentent suivant le signe du discriminant. On montre comme précédemment
  - si (EC) a deux racines réelles distinctes $(r_1, r_2) \in \mathbf{R}^2$, alors les suites géométriques $(r_1^n)_n$ et $(r_2^n)_n$ forment une base de $\mathscr{E}_{a,b}$.
  - si (EC) admet une racine double r_0, les suites $(r_0^n)_n$ et $(nr_0^n)_n$ forment une base de $\mathscr{E}_{a,b}$.
  - si (EC) admet deux racines complexes et conjuguées $\rho e^{\pm i\theta}$, alors les suites $\rho^n \cos(n\theta)$ et $\rho^n \sin(n\theta)$ forment une base de $\mathscr{E}_{a,b}$.

Dans chacun de ces trois derniers cas, $\mathscr{E}_{a,b}$ est donc un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension 2. ▲

Exercice : On considère l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2

$$(EDL) \qquad y'' + ay' + by = 0, \text{ avec } (a,b) \in \mathbf{R}^2$$

Montrez que l'ensemble des solutions de (EDL) est un **R**-espace vectoriel de dimension 2.

II Sous-espaces d'un e.v. de dimension finie

1 Dimension des sous-espaces

Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie est de dimension finie, inférieure à celle de E. Plus précisément :

Théorème 22.12.— Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbf{N}$ et F un sous-espace vectoriel de E. Alors

- F est de dimension finie et $\dim_{\mathbf{K}} F \leq \dim_{\mathbf{K}} E$
- $\dim_{\mathbf{K}} F = \dim_{\mathbf{K}} E \iff E = F$

Conséquence : appliqué à $E = \mathbf{K}^n$, ce théorème montre que tout sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$ est isomorphe à $\mathbf{K}^p$, avec $0 \leq p \leq n$.

En pratique :

- la première assertion peut être utilisée pour démontrer qu'un espace vectoriel n'est pas de dimension finie : il suffit d'exhiber des sous-espaces de dimension arbitrairement grande !

- la deuxième assertion du théorème est très utile pour démontrer l'égalité $F = E$: lorsque les deux espaces ont même dimension, une inclusion suffit à prouver l'égalité !

Remarque : l'énoncé de ce théorème n'est pas sans rappeler le **Théorème** 28.5. De fait, il s'agit d'un argument clé de la démonstration.

Démonstration $\triangledown$

- La démonstration est basée sur le même schéma général que celle du **Théorème** 22.1.
Considérons l'ensemble des familles libres de vecteurs de F :

$$\mathscr{F} = \{\mathscr{F} \in F^I \mid \mathscr{F} \text{ libre }\}$$

Comme la famille vide est élément de $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}$ est non vide[1]. Montrons que $\mathscr{F}$ contient une famille libre et de cardinal maximal.
Pour cela, notons que si $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs de F qui est libre, il s'agit *a fortiori* d'une famille libre de vecteurs de E. Comme E est de dimension finie, il s'ensuit (à l'aide du **Corollaire** 22.5) que $\mathscr{F}$ est finie et de cardinal inférieur à n. En conséquence, toute famille libre de F est constituée d'au plus $\dim_{\mathbf{K}} E = n$ vecteurs. Comme toute partie majorée et non vide de **N** possède un plus grand élément ($\mathbf{N}_2$), il existe une famille $\mathcal{B}$ libre de vecteurs de F de cardinal maximal $p \leq n$. Montrons que $\mathcal{B}$ est une base de F :
Par construction, $\mathcal{B}$ est libre. De plus si $\vec{v} \in F \setminus \mathcal{B}$ est un vecteur de F, la famille $\mathcal{B} \cup \{\vec{v}\}$ est de cardinal $p+1$. Il en résulte qu'elle est nécessairement liée. Comme $\mathcal{B}$ est libre, cela signifie que $\vec{v}$ est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.
Autrement dit, la famille $\mathcal{B}$ engendre F.
- Si $E = F$, il n'y a rien à démontrer. Supposons que $\dim_{\mathbf{K}} F = \dim_{\mathbf{K}} E$, et montrons que $E = F$. Considérons une base $\mathcal{L}$ de F. Il s'agit en particulier d'une famille libre de vecteurs de E. D'après le **Théorème de la base incomplète**, $\mathcal{L}$ peut-être complétée en une base $\mathcal{B}$ de E.
Par hypothèse, $\mathcal{L}$ est de cardinal $\dim_{\mathbf{K}} E$. Ainsi, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{B}$ ont même cardinal. Ainsi,

$$\begin{array}{lrcl} \bullet & \mathcal{L} & \subset & \mathcal{B} \\ \bullet & \mathrm{Card}\ \mathcal{L} & = & \mathrm{Card}\ \mathcal{B} \end{array}$$

Par conséquent, d'après le **Théorème** 28.5

$$\mathcal{L} = \mathcal{B}.$$

[1] wouahh !

Ainsi, $\mathcal{L}$ est une base de E. En particulier, $\mathcal{L}$ engendre E. Comme il s'agit d'une base de F, j'en déduis que

$$E = \mathsf{Vect}\,\mathcal{L} = F$$

▲

Exercice : Démontrez que $\mathbf{K}[X]$, $\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$ et $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ sont des espaces vectoriels de dimension infinie.

Solution ▽

Il suffit de remarquer que pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace de dimension $n+1$ de $\mathbf{K}[X]$. Ainsi, $\mathbf{K}[X]$ contient des sous-espaces de dimension arbitrairement grande. Par conséquent, il ne peut être de dimension finie.

$\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$ contient l'ensemble $\mathbf{K}[x]$ des fonctions polynomiales, qui –comme on vient de le voir – est de dimension infinie. Par conséquent, $\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$ est aussi de dimension infinie.

Pour le dernier exemple, il suffit de remarquer que l'ensemble des suites numériques nulles à partir du $n^{\text{ième}}$ rang est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ de dimension n. Comme précédemment, $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ possède donc des sous-espaces de dimension arbitrairement grande : il est nécessairement de dimension infinie. ▲

Exercice : Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$.

1. Montrez que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ et donnez-en une base.
2. Soit $F = \mathsf{Vect}\,\{\vec{u}, \vec{v}\}$, le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par $\vec{u} = (1, 1, 1)$ et $\vec{v} = (3, 1, -1)$. Vérifiez que $F \subset E$. A-t-on $E \subset F$?

Solution ▽

1. *E est le noyau de la forme linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. Pour déterminer une base de E, remarquons que*

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in E \iff x_1 = 2x_2 - x_3$$

Par suite, $E = \{(2x_2 - x_3; x_2; x_3);\ (x_2; x_3) \in \mathbf{R}^2\} = \mathsf{Vect}\,\{(2; 1; 0);\ (-1; 0; 1)\}$. Notons $\vec{a} = (2; 1; 0)$ et $\vec{b} = (-1; 0; 1)$. D'après ce qui précède, $\{\vec{a}; \vec{b}\}$ est une famille génératrice de E. De plus, les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ n'étant pas colinéaires, ces deux vecteurs sont linéairement indépendants. Ils forment donc une base de E.

2. *On vérifie aisément que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ appartiennent tous deux à E car leurs coordonnées satisfont l'équation de E. Ainsi*

$$\{\vec{u}; \vec{v}\} \subset E$$

Comme E est un espace vectoriel qui contient $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il contient nécessairement le-plus-petit-sous-espace-vectoriel-qui-contient-$\vec{u}$-et-$\vec{v}$, à savoir :

$$F = \mathsf{Vect}\,\{\vec{u}; \vec{v}\} \subset E$$

Comme les sous-espaces E et F sont de même dimension –2 en l'occurrence– sur $\mathbf{R}$, ils sont égaux. ▲

2 Sommes de sous-espaces

Théorème 22.13.— Théorème des quatre dimensions
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie E. Alors F, G, $F \cap G$ et $F + G$ sont de dimensions finies et

$$\boxed{\dim_{\mathbf{K}}\big(F+G\big) + \dim_{\mathbf{K}}\big(F \cap G\big) = \dim_{\mathbf{K}} F + \dim_{\mathbf{K}} G}$$

Démonstration ▽

D'après le **Théorème** 22.12, F, G, $F \cap G$ et $F + G$ sont de dimensions finies puisque ce sont des sous-espaces vectoriels de E. Notons

$$\dim_{\mathbf{K}} F \cap G = r; \quad \dim_{\mathbf{K}} F = r + p; \quad \dim_{\mathbf{K}} G = r + q.$$

Etant donnée une base –dont l'existence est garantie par le **Corollaire** 22.3– $\mathcal{B} = \left(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r\right)$ de $F \cap G$, on peut la considérer comme une famille libre de vecteurs de F ou bien de G. En appliquant le corollaire du **Théorème de la base**

incomplète dans F et dans G, j'obtiens une base de F et une base de G contenant toutes deux $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{B} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \left(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\right) & & \left(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r, \vec{\epsilon}_1, \ldots, \vec{\epsilon}_q\right) \end{array}$$

J'affirme que $\mathscr{F} = \left(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p, \vec{\epsilon}_1, \ldots, \vec{\epsilon}_q\right)$ est une base de $F+G$.

- $\mathscr{F}$ est génératrice :
  Soit $\vec{x} \in F+G$. Par construction de $F+G$, $\vec{x}$ s'écrit comme la somme d'un vecteur $\vec{v}$ de F et d'un vecteur $\vec{w}$ de G. Comme les familles $\left(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\right)$ et $\left(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r, \vec{\epsilon}_1, \ldots, \vec{\epsilon}_q\right)$ engendrent F et G respectivement, il existe des scalaires $(\alpha_i)_{1\le i\le r}$, $(\beta_i)_{1\le i\le r}$, $(\mu_j)_{1\le j\le p}$ et $(\nu_k)_{1\le k\le q}$ tels que

$$\left\{\begin{array}{lcl} \vec{v} & = & \sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot \vec{b}_i + \sum_{j=1}^p \mu_j \cdot \vec{e}_j \\ \vec{w} & = & \sum_{i=1}^r \beta_i \cdot \vec{b}_i + \sum_{k=1}^q \nu_k \cdot \vec{\epsilon}_k. \end{array}\right.$$

  En ajoutant ces deux égalités terme à terme, j'obtiens $\vec{x}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F} = \left(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p, \vec{\epsilon}_1, \ldots, \vec{\epsilon}_q\right)$.
- $\mathscr{F}$ est libre :
  Soit $(\lambda_i)_{1\le i\le r}$, $(\mu_j)_{1\le j\le p}$ et $(\nu_k)_{1\le k\le q}$ des scalaires tels que

$$\underbrace{\sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot \vec{b}_i}_{\vec{u}\in F\cap G} + \underbrace{\sum_{j=1}^p \mu_j \cdot \vec{e}_j}_{\vec{v}\in F} + \underbrace{\sum_{k=1}^q \nu_k \cdot \vec{\epsilon}_k}_{\vec{w}\in G} = \vec{0}_E \tag{22.2}$$

  De cette égalité *a priori* entre vecteurs de $F+G$, je tire successivement :
  1. $\underbrace{\vec{v}}_{\in F} = \underbrace{-\vec{u} - \vec{w}}_{\in G}$. Comme $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs de G, j'en déduis que $\vec{u}+\vec{w} \in G$ et par suite, que $\vec{v} \in F\cap G$.
     Comme les $\vec{b}_i$ forment une base de $F\cap G$, le vecteur $\vec{v}$ s'écrit sous la forme
     $$\vec{v} = \sum_{i=1}^r v_i \cdot \vec{b}_i$$
     Réinjectant cette expression dans (22.2), j'obtiens
     $$\sum_{i=1}^r (\lambda_i + v_i) \cdot \vec{b}_i + \sum_{k=1}^q \nu_k \cdot \vec{\epsilon}_k = \vec{0}_E$$
     Comme $\left(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r, \vec{\epsilon}_1, \ldots, \vec{\epsilon}_q\right)$ est une base de G, il s'agit d'une famille libre. Par conséquent, la relation ci-dessus entraîne que nécessairement $\nu_1 = \cdots = \nu_q = 0$. En particulier $\vec{w} = \vec{0}_E$.
  2. Ainsi, (22.2) se réduit à
     $$\sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot \vec{b}_i + \sum_{j=1}^p \mu_j \cdot \vec{e}_j = \vec{0}_E$$
     Comme $\left(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\right)$ constitue une base de F, elle est en particulier libre, et la relation ci-dessus entraîne que $\mu_1 = \cdots = \mu_p = 0$ et $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$.

Ainsi, $\mathscr{F}$ est une base de $F+G$. En particulier,

$$\dim_{\mathbf{K}}(F+G) = p+q+r = (p+r)+(q+r)-r = \dim_{\mathbf{K}}F + \dim_{\mathbf{K}}G - \dim_{\mathbf{K}}(F\cap G).$$

▲

3 Sous-espaces supplémentaires en dimension finie

Rappelons tout d'abord que deux sous-espaces F et G d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E sont supplémentaires, si

$$E = F \oplus G.$$

Grâce au **Théorème de la base incomplète**, nous allons démontrer qu'un sous-espace F d'un espace vectoriel de dimension finie possède toujours des supplémentaires.

3.a Caractérisation des supplémentaires

Nous avons établi, au **Chapitre 23**, une caractérisation des sous-espaces supplémentaires (cf **Théorème** 20.16)

$$F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires } \quad ssi \quad \begin{array}{l} \bullet \ F \cap G = \{\vec{0}_E\} \\ \bullet \ F + G = E \end{array} .$$

Dans le cas particulier où E est de dimension finie, nous en déduisons :

Théorème 22.14.— caractérisation des sous-espaces supplémentaires en dimension finie
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Alors

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires } \quad ssi \quad \begin{array}{l} \bullet \ F \cap G = \{\vec{0}_E\} \\ \bullet \ \dim_{\mathbf{K}} F + \dim_{\mathbf{K}} G = \dim_{\mathbf{K}} E \end{array} .}$$

En pratique : pour prouver que deux sous-espaces F et G sont supplémentaires, vous pouvez

- revenir à la définition et procéder par **analyse-synthèse** ;
- utiliser cette caractérisation lorsque E est de dimension finie.

La caractérisation obtenue au **Chapitre 23** est utilisée plus rarrement.

Démonstration ▽

Les conditions sont nécessaires : supposons que F et G soient supplémentaires. En ce cas, d'après le **Théorème** 20.16, $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ et $E = F + G$.
Comme d'après le **Théorème des quatre dimensions** (22.13),

$$\dim F + \dim G = \dim (F + G) + \dim (F \cap G),$$

nous en déduisons que $\dim F + \dim G = \dim E$.

Les conditions sont suffisantes : supposons que $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ et que $\dim F + \dim G = \dim E$. D'après le **Théorème** 22.13,

$$\dim F + \dim G = \dim (F + G) + \dim (F \cap G),$$

il en résulte que $\dim (F+G) = \dim E$. Comme $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E, ceci entraîne, d'après le **Théorème** 22.12, que $F + G = E$.
Ainsi, $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ et $F + G = E$. D'après la caractérisation des supplémentaires obtenue au **Chapitre 23**, cela suffit pour garantir que F et G sont supplémentaires. ▲

Exercice : On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. On considère les sous-ensembles

$$\begin{aligned} F &= \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid \exists (a, b) \in \mathbf{R}^2 \text{ tel que } A = \begin{pmatrix} a & 2a + b \\ -b & -a \end{pmatrix} \right\} \text{ et} \\ G &= \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid \exists (a, b) \in \mathbf{R}^2 \text{ tel que } A = \begin{pmatrix} a & 3a + b \\ -b & -2a + b \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

1. Montrez que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

2. Montrez que F et G sont supplémentaires.

Solution ▽

1. *Un élément quelconque de F s'écrit*

$$A = \begin{pmatrix} a & 2a + b \\ -b & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, F apparaît comme l'ensemble des combinaisons linéaires des matrices $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Autrement dit, F est le sous-espace vectoriel de E engendré par U_1 et U_2.

Ceci prouve non seulement que F est un sous-espace vectoriel, mais aussi que (U_1, U_2) est une base de F, puisque ces deux matrices ne sont pas colinéaires.
De même, on vérifie aisément que G est le sous-espace vectoriel de E engendré par

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme V_1 et V_2 ne sont pas colinéaires, (V_1, V_2) est une base de G.

2. • *Remarquons que d'après la question précédente,*

$$\dim_{\mathbf{R}} F + \dim_{\mathbf{R}} G = 2 + 2 = \dim_{\mathbf{R}} E.$$

• *Montrons que $F \cap G = \{\vec{0}_2\}$.*
Soit $M \in F \cap G$. Par construction, il existe des réels (a, b, a', b') tels que

$$M = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & 3a'+b' \\ -b' & -2a'+b' \end{pmatrix}$$

Cette équation "vectorielle" se traduit par le système d' équations linéaires

$$\begin{cases} a = a' \\ -b = -b' \\ 2a+b = 3a'+b' \\ -a = -2a'+b' \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ a' = 0 \\ b' = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, $M = 0_2$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

Ainsi, les conditions $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$ sont satisfaites. Le résultat en découle grâce au **Théorème** *22.14.* ▲

3.b Existence de supplémentaires

Théorème 22.15.— Existence de supplémentaires en dimension finie
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E. Alors il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que

$$\boxed{E = F \oplus G}$$

De plus si F est de dimension p, alors G est de dimension $n - p$.

Remarque : Il n'y a pas unicité du supplémentaire.

Démonstration ▽
Considérons une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ de F. Il s'agit d'une famille libre de E. D'après le **Théorème** 22.1, nous pouvons compléter $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ en une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{\epsilon}_{p+1}, \dots, \vec{\epsilon}_n)$ de E. Posons $G = \operatorname{Vect}(\vec{\epsilon}_{p+1}, \dots, \vec{\epsilon}_n)$. Alors G est un supplémentaire de F. En effet

- Montrons que $\dim_{\mathbf{K}} F + \dim_{\mathbf{K}} G = \dim_{\mathbf{K}} E$.
  Par construction, la famille $(\vec{\epsilon}_{p+1}, \dots, \vec{\epsilon}_n)$ est libre (puisqu'il s'agit d'une sous-famille d'une base) et engendre G. Il s'agit donc d'une base de G. Par conséquent, $\dim_{\mathbf{K}} G = n - p = \dim_{\mathbf{K}} E - \dim_{\mathbf{K}} F$.
- Montrons que $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$. Soit donc $\vec{x} \in F \cap G$. Comme $\vec{x}$ appartient à F(*resp.* G), il se décompose dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ (*resp.* $(\vec{\epsilon}_{p+1}, \dots, , \vec{\epsilon}_n)$) de F (*resp.* de G) :

$$\left\| \begin{array}{lcl} \vec{x} & = & \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + \lambda_p \cdot \vec{e}_p \\ \vec{x} & = & \lambda_{p+1} \cdot \vec{\epsilon}_{p+1} + \dots + \lambda_n \cdot \vec{\epsilon}_n \end{array} \right.$$

Par soustraction, il vient

$$\vec{0}_E = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + \lambda_p \cdot \vec{e}_p - \lambda_{p+1} \cdot \vec{\epsilon}_{p+1} - \dots - \lambda_n \cdot \vec{\epsilon}_n$$

Comme par construction la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{\epsilon}_{p+1}, \dots, \vec{\epsilon}_n)$ est une base de E, elle est en particulier libre et par conséquent, cette dernière relation entraîne nécessairement

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = 0$$

Ainsi, $\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot \vec{e}_i = \vec{0}_E$.

Pour conclure, il suffit dès lors d'invoquer le **Théorème** 22.14. ▲

Corollaire 22.16.— Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie. Alors
- Tout sous-espace vectoriel de E est le noyau d'un endomorphisme de E.
- Tout sous-espace vectoriel de E est l'image d'un endomorphisme de E.

Commentaires : nous avons vu sur les exemples du **Chapitre 24** deux constructions de sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}^n$, comme noyau ou comme image d'une application linéaire. Ce corollaire montre –en dimension finie– que tout sous-espace vectoriel peut être vu
- comme l'image par une application linéaire : c'est le **point de vue paramétrage**,
- comme le noyau d'une application linéaire de E dans $\mathbf{K}^n$: c'est le **point de vue équations**.

Démonstration ▽
Soit F un sous-espace vectoriel de E et G un supplémentaire de F. Considérons $p = p_F$ (*resp.* $q = p_G$) la projection de E sur F (*resp.* G) parallèlement à G (*resp.* F). D'après la **Proposition** 21.22, $F = \operatorname{Im} p$ et $F = \operatorname{Ker} q$. ▲

3.c Construction de supplémentaires

En pratique : pour déterminer un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel, suivez le plan de la démonstration du **Théorème** 22.15 :
- Déterminez une base $\mathscr{F}$ de F ;
- Complétez-la en une base de E , ce qui revient à trouver une famille $\mathcal{G}$ de vecteurs de E de sorte que $\mathscr{F} \cup \mathcal{G}$ soit une base de E
- Posez $G = \operatorname{Vect}(\mathcal{G})$.

Vocabulaire : *on dit en ce cas que la base $\mathscr{F} \cup \mathcal{G}$ est une **base adaptée à la décomposition** $E = F \oplus G$.*

Exercice : Considérons dans $E = \mathbf{R}^3$, l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in E \mid x + 2y - z = 0\}$.

1. Montrez que F est un sous-espace vectoriel de E.

2. Déterminez un supplémentaire de F dans E.

Solution ▽

1. *F est le noyau de la forme linéaire $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ définie par $\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad f(x, y, z) = x + 2y - z$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.*

2.
- *Déterminons une base de F.*
  Remarquons que pour tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad (x, y, z) \in F \iff z = x + 2y$.
  Par conséquent,
  $$F = \{(x, y, x + 2y);\ (y, z) \in \mathbf{R}^2\} = \operatorname{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 1, 2)\}$$
  Comme de plus, les vecteurs $\vec{u} = (1, 0, 1)$ et $\vec{v} = (0, 1, 2)$ ne sont pas colinéaires, ils forment une base de F.

- *Posons $\vec{w} = (0, 0, 1)$ et vérifions que $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbf{R}^3$.*
  *Pour ce faire, utilisons la **Caractérisation des bases** (**Théorème** 20.21) :*
  Soit $\vec{z} = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. Il s'agit de prouver que ce vecteur s'écrit, de manière unique, sous la forme d'une combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
  Or, pour tout triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$ de scalaires, l'équation vectorielle
  $$\lambda_1 \cdot \vec{u} + \lambda_2 \cdot \vec{v} + \lambda_3 \cdot \vec{w} = \vec{z}$$
  se traduit par le système d'équations linéaires
  $$(S_{a,b,c}) \quad \begin{cases} \lambda_1 & & & = a \\ & \lambda_2 & & = b \\ \lambda_1 & +2\lambda_2 & +\lambda_3 & = c \end{cases}$$
  Comme $(S_{a,b,c})$ est un système triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, il est de CRAMER. *Il existe donc un triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$, unique tel que*
  $$\lambda_1 \cdot \vec{u} + \lambda_2 \cdot \vec{v} + \lambda_3 \cdot \vec{w} = \vec{z}$$

Ainsi, tout vecteur $\vec{z}$ de $\mathbf{R}^3$ se décompose de manière unique sous forme d'une combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. D'après le **Théorème** *20.21, ceci prouve que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbf{R}^3$.*

- *Ainsi la droite vectorielle $G = \mathrm{Vect}(\vec{w})$ est un supplémentaire de F.* ▲

III Familles de vecteurs d'un e.v. de dimension finie

1 Familles libres et génératrices dans un e.v. de dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbf{K}$. D'après le **Théorème de la base incomplète**, toute famille libre peut être complétée en une base de E et de toute famille génératrice peut être extraite une base, en particulier :

Proposition 22.17.— Cardinal des familles libres, génératrices
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}$. On considère une famille $\mathscr{F}$ de vecteurs de E. Alors

- si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\mathcal{F}$ est finie et $\mathrm{Card}\ (\mathcal{F}) \leq n$.
- si $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $\mathcal{F}$ est infinie ou $\mathrm{Card}\ (\mathcal{F}) \geq n$.
- si $\mathrm{Card}\ (\mathcal{F}) > n$, alors $\mathcal{F}$ est liée.
- si $\mathrm{Card}\ (\mathcal{F}) < n$, alors $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice.

Commentaires : ainsi, dans un espace vectoriel de dimension n,

- le nombre **maximal** de vecteurs linéairement indépendants est n.
- le nombre **minimal** de vecteurs nécessaires pour engendrer E est n.

Ceci conduit à adopter les définitions suivantes :

Vocabulaire : *Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-e.v. de* ***dimension finie*** *n.*

- *$\mathcal{F}$ est* ***libre maximale****, si $\mathcal{F}$ est libre et de* ***cardinal*** *n.*
- *$\mathcal{F}$ est* ***génératrice minimale****, si $\mathcal{F}$ est génératrice et de* ***cardinal*** *n.*

Démonstration ▽

- les deux premiers points ont déjà été établis (cf **Corollaire** 22.5).
- les deux derniers s'en déduisent aisément.[2] ▲

2 Caractérisation des bases en dimension finie

En ce qui concerne une base $\mathcal{B}$ d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension n, nous savons que *nécessairement*

- $\mathcal{B}$ est de cardinal n,
- $\mathcal{B}$ est libre,
- $\mathcal{B}$ est génératrice.

De ces trois conditions nécessaires, deux quelconques *suffisent* pour affirmer que $\mathcal{B}$ est une base : c'est la

Théorème 22.18.— caractérisation des bases en dimension finie
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $\boldsymbol{n} \in \mathbf{N}$ et $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une famille de $\boldsymbol{n}$ vecteurs de E. Les assertions suivantes sont :

$\Updownarrow$
- $\mathscr{F}$ est libre maximale
- $\mathscr{F}$ est génératrice minimale
- $\mathscr{F}$ est une base

En pratique : pour démontrer qu'une famille donnée $\mathscr{F}$ est une base d'un espace vectoriel E de dimension finie *connue* n,

- vérifiez que $\mathrm{Card}\ \mathscr{F} = n$. (ça saute aux yeux)

[2] think different, think $\mathscr{C}ontra\sim\mathscr{P}osée$

• vous prouvez que $\mathscr{F}$ est libre (ou plus rarement que $\mathscr{F}$ est génératrice).

Démonstration $\triangledown$

• si $\mathscr{F}$ est une base de E, alors par définition, $\mathscr{F}$ est libre.

• si $\mathscr{F}$ est une base de E, alors par définition, $\mathscr{F}$ est génératrice.

• Soit $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une famille libre de n vecteurs de E. D'après le **Théorème de la base incomplète**, nous pouvons compléter cette famille en une base $\mathcal{B}$ de E. Comme toute base de E est de cardinal n, nous avons

$$\mathscr{F} \subset \mathcal{B} \text{ et } \mathsf{Card}\ \mathscr{F} = \mathsf{Card}\ \mathcal{B}$$

D'après le **Théorème** 28.5, il en résulte que $\mathscr{F} = \mathcal{B}$, en particulier, $\mathscr{F}$ est une base de E.

• Soit $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une famille génératrice de n vecteurs de E. D'après le **Théorème de la base incomplète**, nous pouvons extraire une base $\mathcal{B}$ de E de cette famille. Comme toute base de E est de cardinal n, nous avons

$$\mathcal{B} \subset \mathscr{F} \text{ et } \mathsf{Card}\ \mathscr{F} = \mathsf{Card}\ \mathcal{B}$$

D'après le **Théorème** 28.5, il en résulte que $\mathscr{F} = \mathcal{B}$, en particulier, $\mathscr{F}$ est une base de E. ▲

Remarque : nous avons déjà vérifié ce résultat dans des cas particuliers de familles de n vecteurs de $\mathbf{R}^n$. Il se réduit en ce contexte au **Théorème** 18.14 :

Exemple : Considérons la famille $\mathscr{F} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$ formée de 3 vecteurs de $\mathbf{R}^3$.

$$\vec{u}_1 = (1,1,0),\ \vec{u}_2 = (-1,0,1) \text{ et } \vec{u}_3 = (0,-1,1)$$

Alors par définition

$$\mathscr{F} \text{ est génératrice } \iff \forall (a,b,c) \in \mathbf{R}^3,\quad \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3,\ \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{u}_3 = (a,b,c)$$

Cette équation vectorielle se traduit en coordonnées par le fait que **pour tout second membre** (a,b,c), **le système** de *trois* équations à *trois* inconnues $(S_{a,b,c})$ **soit compatible** où

$$\forall (a,b,c) \in \mathbf{R}^3,\ (S_{a,b,c}) \iff \begin{cases} \lambda_1 & -\lambda_2 & & = a \\ \lambda_1 & & -\lambda_3 & = b \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & = c \end{cases}$$

Or, d'après le **Théorème** 18.14, ceci est équivaut à dire que **le système homogène associé**

$$(S_o) \iff \begin{cases} \lambda_1 & -\lambda_2 & & = 0 \\ \lambda_1 & & -\lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

admette une unique solution, à savoir $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$.
Autrement dit, l'équation vectorielle

$$\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{u}_3 = \vec{0}$$

admet pour unique solution la solution triviale.
Résumons

$$\begin{aligned} \mathscr{F} \text{ est génératrice } &\iff \forall (a,b,c)\ (S_{a,b,c}) \text{ est compatible} \\ &\iff (S_o) \text{ est de } \textsc{Cramer} \\ &\iff \mathscr{F} \text{ est libre} \end{aligned}$$

Exercice : Montrez que $\mathcal{B} = \big(X^n, X^{n-1}(1+X), X^{n-2}(1+X)^2, \dots, (1+X)^n\big)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

Solution $\triangledown$
Remarquons tout d'abord que Card $\mathcal{B} = n+1 = \dim_{\mathbf{K}} \mathbf{K}_n[X]$. D'après le **Théorème** *22.18, il suffit donc de prouver que $\mathcal{B}$ est libre.*
Soit donc $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ tel que

$$\lambda_0 \cdot (1+X)^n + \lambda_1 \cdot X \times (1+X)^{n-1} + \cdots + \lambda_n \cdot X^n = 0 \tag{22.3}$$

Notons pour alléger $P_k = X^k \times (1+X)^{n-k}$. S'il s'était agi de vecteurs de $\mathbf{K}^{n+1}$, nous aurions traduit cette équation vectorielle en un système d'équations en les coordonnées. Comme il s'agit ici d'une relation polynomiale, nous pouvons évaluer (22.3) au point 0. Il vient tout d'abord :

$$1\,\lambda_0 + 0\,\lambda_1 + \cdots + 0\,\lambda_n = 0$$

Plus généralement, si $k \in [\![1, n]\!]$, remarquons que 0 est racine d'ordre k de P_k. D'après la **caractérisation des racines multiples**, *il en résulte que si $i < k$, alors $P_k^{(i)}(0) = 0$ et $P_k^{(k)}(0) \neq 0$.*
Dérivons donc k fois la relation (22.3) et évaluons au point 0. Il vient :

$$P_0^{(k)}(0)\,\lambda_0 + P_1^{(k)}(0)\,\lambda_1 + \cdots + P_k^{(k)}(0)\,\lambda_k + 0\,\lambda_{k+1} + \cdots + 0\;\lambda_n = 0$$

Pour résumer, $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est donc solution du système :

$$(22.3) \iff \begin{cases} \boxed{P_0(0)}\,\lambda_0 & & & & = 0 \\ P_0^{(1)}(0)\lambda_0 \;+ & \boxed{P_1^{(1)}(0)}\,\lambda_1 & & & = 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ P_0^{(n)}(0)\lambda_0 \;+ & \cdots & +\; P_{n-1}^{(n-1)}(0)\lambda_{n-1} \;+ & \boxed{P_n^{(n)}(0)}\,\lambda_n & = 0 \end{cases}$$

Ce système est triangulaire inférieur, à coefficients diagonaux non nuls, il admet donc une unique solution :

$$(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, 0, \dots, 0).$$

En conclusion, la famille $\mathcal{B}$ est libre maximale, c'est donc une base de $\mathbf{K}_n[X]$. ▲

3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition : *Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Le* ***rang de*** *$\mathscr{F}$ est :*

$$\boxed{\operatorname{Rg} \mathscr{F} = \dim_{\mathbf{K}} \operatorname{Vect}(\mathscr{F})}$$

Commentaires : comme $\operatorname{Vect} \mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de dimension finie E, il s'agit d'un espace vectoriel de dimension finie.

Le rang de $\mathscr{F}$ est donc un entier naturel qui vérifie :

Proposition 22.19.— Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Alors

$$\operatorname{Rg} \mathscr{F} \leq \min\{\dim_{\mathbf{K}} E, \operatorname{Card} \mathscr{F}\}.$$

Démonstration $\triangledown$
• $\operatorname{Vect} \mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de E. Le résultat découle donc du **Théorème** 22.12.

• Par construction, $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel de dimension finie $\operatorname{Vect} \mathscr{F}$. Il résulte de la **Proposition** 22.17 que Card $\mathscr{F} \geq \dim_{\mathbf{K}} \operatorname{Vect} \mathscr{F}$. ▲

Le calcul du rang d'une famille permet de déterminer simplement si elle est libre ou génératrice. En effet

Théorème 22.20.— *Hors programme* **—.**
Soit $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de p vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbf{N}$. Alors

- $\mathscr{F}$ est génératrice de E *si et seulement si* $\operatorname{Rg} \mathscr{F} = n$.
- $\mathscr{F}$ est libre dans E *si et seulement si* $\operatorname{Rg} \mathscr{F} = p$.
- $\mathscr{F}$ est une base de E *si et seulement si* $\operatorname{Rg} \mathscr{F} = n = p$.

Démonstration $\triangledown$

- Raisonnons par équivalences. En utilisant le **Théorème** 22.12, il vient :

$$\begin{aligned}\mathscr{F} \text{ est génératrice de } E &\iff \mathsf{Vect}\,\mathscr{F} = E\\ &\iff \dim_{\mathbf{K}}\mathsf{Vect}\,\mathscr{F} = \dim_{\mathbf{K}} E\\ &\iff \mathsf{Rg}\,\mathscr{F} = n.\end{aligned}$$

- Raisonnons par équivalences. En utilisant le **Théorème de la dimension** et le **Théorème** 22.18, il vient :

$$\begin{aligned}\mathscr{F} \text{ est libre dans } E &\iff \mathscr{F} \text{ est libre dans } \mathsf{Vect}\,\mathscr{F}\\ &\iff \mathscr{F} \text{ est une base de } \mathsf{Vect}\,\mathscr{F}\\ &\iff \dim_{\mathbf{K}}\mathsf{Vect}\,\mathscr{F} = p\\ &\iff \mathsf{Rg}\,\mathscr{F} = p.\end{aligned}$$

- D'après les deux premiers points, nous avons :

$$\mathscr{F} \text{ est une base de } E \iff \begin{cases}\mathscr{F} \text{ est génératrice de } E\\ \mathscr{F} \text{ est libre dans } E\end{cases} \iff \begin{cases}\mathsf{Rg}\,\mathscr{F} = n\\ \mathsf{Rg}\,\mathscr{F} = p\end{cases} \iff \mathsf{Rg}\,\mathscr{F} = n = p.$$

▲

IV Applications linéaires en dimensions finies

1 Formule du rang

1.a Exemple introductif

Considérons un projecteur f d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Alors, d'après le **Théorème** 21.23, $\mathsf{Ker}\,f$ et $\mathsf{Im}\,f$ sont supplémentaires et p est la projection de E sur $\mathsf{Im}\,f$ parallèlement à $\mathsf{Ker}\,f$. En particulier, d'après la **Caractérisation des supplémentaires** en dimension finie (**Théorème** 22.14)

$$\dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{K}}\mathsf{Im}\,f + \dim_{\mathbf{K}}\mathsf{Ker}\,f$$

Le **théorème fondamental** qui suit montre que cette relation subsiste pour toute application linéaire définie sur E :

Théorème 22.21.— Formule du rang
Soient E et F des espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que E est de dimension finie. Alors $\mathsf{Ker}\,f$ et $\mathsf{Im}\,f$ sont des espaces de dimension finie et :

$$\boxed{\dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{K}}\mathsf{Im}\,f + \dim_{\mathbf{K}}\mathsf{Ker}\,f}$$

Commentaires : en général, $\mathsf{Im}\,f$ et $\mathsf{Ker}\,f$ ne sont pas supplémentaires (ce ne sont même pas des sous-espaces d'un même espace !). Toutefois, on vérifie[3] que $\mathsf{Im}\,f$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\mathsf{Ker}\,f$ dans E.

Démonstration $\triangledown$
Notons $n = \dim_{\mathbf{K}} E$ et $p = \dim_{\mathbf{K}}\mathsf{Ker}\,f$ et considérons une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ de $\mathsf{Ker}\,f$. Cette famille de vecteurs de E étant libre, appliquons le **Théorème** 22.2 pour la compléter en une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{\epsilon}_{p+1}, \dots, \vec{\epsilon}_n)$ de E. J'affirme que $(f(\vec{\epsilon}_{p+1}), \dots, f(\vec{\epsilon}_n))$ est une base de $\mathsf{Im}\,f$:

- $(f(\vec{\epsilon}_{p+1}), \dots, f(\vec{\epsilon}_n))$ est génératrice.
  Remarquons que $f : E \to \mathsf{Im}\,f$ est surjective. Par conséquent, d'après la **Proposition** 21.15, il en résulte que l'image par f d'une base de E est génératrice de $\mathsf{Im}\,f$. Ainsi, $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_p), f(\vec{\epsilon}_{p+1}), \dots, f(\vec{\epsilon}_n))$ engendre $\mathsf{Im}\,f$. Comme de plus $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p$ appartiennent à $\mathsf{Ker}\,f$, il en résulte que $(f(\vec{\epsilon}_{p+1}), \dots, f(\vec{\epsilon}_n))$ est génératrice.

[3] en utilisant le **Théorème** 22.15 et le **Théorème** 22.7

• $(f(\vec{\epsilon}_{p+1}), \ldots, f(\vec{\epsilon}_n))$ est libre.
Soit $(\lambda_i)_{p+1 \leq i \leq n}$ des scalaires tels que

$$\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i \cdot f(\vec{\epsilon}_i) = \vec{0}_F$$

Il s'ensuit par linéarité de f que le vecteur $\vec{x} = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{\epsilon}_i$ est dans le noyau de f. Par conséquent, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot \vec{e}_i$. Il en résulte que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot \vec{e}_i - \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i \cdot f(\vec{\epsilon}_i) = \vec{0}_E$$

Comme par construction $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p, \vec{\epsilon}_{p+1}, \ldots, \vec{\epsilon}_n)$ est une base de E, ceci n'est possible que lorsque tous les scalaires λ_i pour $1 \leq i \leq n$ sont nuls. En particulier,

$$\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$$

Ainsi, $(f(\vec{\epsilon}_{p+1}), \ldots, f(\vec{\epsilon}_n))$ est une base de $\mathsf{Im}\, f$. Par conséquent, $\mathsf{dim}_{\mathbf{K}}\mathsf{Im}\, f = n - p = \mathsf{dim}_{\mathbf{K}} E - \mathsf{dim}_{\mathbf{K}}\mathsf{Ker}\, f$. ▲

Exercice : Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^\star$ et H un sous-espace vectoriel de E. Démontrez que les assertions suivantes sont équivalentes :

- H est le noyau d'une forme linéaire non nulle ;
- H est le supplémentaire d'une droite vectorielle ;
- H est de dimension $n - 1$.

Si l'une des trois conditions ci-dessus est réalisée, on dit que H **est un hyperplan de** E.

1.b Caractérisation des isomorphismes

Une **conséquence** tout aussi **fondamentale**, concerne les applications linéaires entre espaces de **même dimension finie** :

Théorème 22.22.— Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de type fini et de **même dimension**. Pour toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

$\Updownarrow$
- f est injective
- f est surjective
- f est bijective (isomorphisme).

Démonstration ▽
• Si f est bijective, alors f est surjective.
• Si f est bijective, alors f est injective.
• Supposons que f soit surjective. Comme par hypothèse, $\mathsf{dim}_{\mathbf{K}} E = \mathsf{dim}_{\mathbf{K}} F$, la **Formule du rang** s'écrit :

$$\mathsf{dim}_{\mathbf{K}} F = \mathsf{dim}_{\mathbf{K}}\mathsf{Im}\, f + \mathsf{dim}_{\mathbf{K}}\mathsf{Ker}\, f$$

Or, l'hypothèse de surjectivité de f se traduit ensemblistement par $\mathsf{Im}\, f = F$. En particulier, $\mathsf{dim}_{\mathbf{K}}\mathsf{Im}\, f = \mathsf{dim}_{\mathbf{K}} F$, de sorte que la **formule du rang** se réduit en ce cas à $\mathsf{dim}_{\mathbf{K}}\mathsf{Ker}\, f = 0$, ce qui revient à dire (d'après le **Théorème** 21.13) que f est injective, et donc bijective.
• Supposons que f soit injective. Comme par hypothèse $\mathsf{dim}_{\mathbf{K}} E = \mathsf{dim}_{\mathbf{K}} F$, la **Formule du rang** s'écrit :

$$\mathsf{dim}_{\mathbf{K}} F = \mathsf{dim}_{\mathbf{K}}\mathsf{Im}\, f + \mathsf{dim}_{\mathbf{K}}\mathsf{Ker}\, f$$

Or, l'hypothèse d'injectivité de f se traduit ensemblistement par $\mathsf{Ker}\, f = \{\vec{0}\}$, de sorte que la formule du rang se réduit en ce cas à $\mathsf{dim}_{\mathbf{K}}\mathsf{Im}\, f = \mathsf{dim}_{\mathbf{K}} F$, ce qui revient à dire (d'après le **Théorème** 22.12) que $\mathsf{Im}\, f = F$. Par suite, f est surjective, et donc bijective. ▲

Remarque : Ce résultat est à rapprocher du **Théorème** 22.18 concernant les familles de n vecteurs d'un espace de dimension finie n, du **Théorème** 19.18 concernant les matrices inversibles, du **Théorème** 18.14 concernant les systèmes de CRAMER ou encore le **Théorème** 28.9 !

En particulier, lorsque $F = E$, nous obtenons :

Corollaire 22.23.— Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ est injectif} \\ \bullet\ f \text{ est surjectif} \\ \bullet\ f \text{ est un automorphisme de } E. \end{array}}$$

En pratique : pour démontrer qu'un endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension finie E est un automorphisme de E, vous prouvez au choix que f est injectif ($\mathsf{Ker}\, f = \{\vec{0}\}$) **ou** que f est surjectif ($\mathsf{Im}\, f = E$).

Remarques :

1. nous avons déjà vérifié ce résultat dans quelques cas particuliers, lorsque $E = \mathsf{K}^n$. En effet, l'assertion f est surjective se traduit alors par le fait que **pour tout second membre** $\vec{b} \in \mathsf{K}^n$, le système d'équations linéaires associé à l'équation vectorielle
$$f(\vec{x}) = \vec{b}$$
soit **compatible**. D'après le **Théorème** 18.14, ceci équivaut au fait que le **système homogène** associé soit de Cramer. Autrement dit, l'équation vectorielle
$$f(\vec{x}) = \vec{0}$$
admet pour **unique solution** la solution triviale : f est donc injectif.
2. le **Théorème** 22.22 est mis en défaut lorsqu'on sort du cadre de la dimension finie :
Ainsi, l'endomorphisme $\Delta : \mathsf{K}[X] \to \mathsf{K}[X]$ qui à tout polynôme associe sa dérivée est surjectif, mais non injectif puisque le polynôme constant égal à 1 est dans $\mathsf{Ker}\, \Delta$.

2 Rang d'une application linéaire

Définition : *Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E ou F est de dimension finie. On appelle **rang de** f, et on note $\mathsf{Rg}\, f$ la dimension de $\mathsf{Im}\, f$:*

$$\boxed{\mathsf{Rg}\, f = \mathsf{dim}_{\mathsf{K}} \mathsf{Im}\, f}$$

Commentaires : le rang d'une application est bien défini lorsque E ou F est de dimension finie car $\mathsf{Im}\, f$ est un espace vectoriel de dimension finie. Plus précisément :

Proposition 22.24.— Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\mathsf{Rg}\, f \leq \min\{\mathsf{dim}_{\mathsf{K}} E, \mathsf{dim}_{\mathsf{K}} F\}.$$

Démonstration ▽

- D'après le **Théorème** 22.21, $\mathsf{Rg}\, f = \mathsf{dim}_{\mathsf{K}} E - \mathsf{dim}_{\mathsf{K}} \mathsf{Ker}\, f \leq \mathsf{dim}_{\mathsf{K}} E$.
- D'après le **Théorème** 22.12, $\mathsf{Rg}\, f = \mathsf{dim}_{\mathsf{K}} \mathsf{Im}\, f \leq \mathsf{dim}_{\mathsf{K}} F$. ▲

Le rang d'une application linéaire sera étudié plus en détail au prochain chapitre, mais nous pouvons déjà noter qu'on ne change pas le rang en composant une application par un isomorphisme :

Proposition 22.25.— Soient E, F, G et H des K-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in GL(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$, $h \in GL(G, H)$ des applications linéaires. Alors

$$\mathsf{Rg}\, g = \mathsf{Rg}\,(g \circ f) = \mathsf{Rg}\,(h \circ g)$$

Démonstration ▽

• Montrons que $\mathsf{Rg}\, g = \mathsf{Rg}\,(g \circ f)$. En effet, comme f est un isomorphisme, il est en particulier surjectif. Par conséquent, $f(E) = F$, d'où
$$\mathsf{Im}\, g = g(F) = g\big(f(E)\big) = (g \circ f)(E) = \mathsf{Im}\,(g \circ f)$$

En particulier, $\mathsf{Rg}\, g = \mathsf{Rg}\, g \circ f$.
• Montrons que $\mathsf{Rg}\, g = \mathsf{Rg}\, h \circ g$. Notons $G_1 = \mathsf{Im}\, g$. Comme h est un isomorphisme, il est en particulier injectif. Par conséquent, h induit une bijection $h_| : G_1 \to h(G_1)$. Ainsi, les sous-espaces vectoriels G_1 et $h(G_1) = (h \circ g)(F)$ sont isomorphes. D'après le **Corollaire** 22.8, il s'ensuit que g et $(h \circ g)$ ont même rang. ▲

Comme pour les familles de vecteurs, le calcul du rang d'une application linéaire permet de savoir si elle est injective/surjective. En effet,

Théorème 22.26.— *Hors programme* **—.**
Soient E et F deux **K**-espaces vectoriels de dimensions finies n et p, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

•	f est injective	*si et seulement si*	$\mathsf{Rg}\, f = \dim_{\mathbf{K}} E$.
•	f est surjective	*si et seulement si*	$\mathsf{Rg}\, f = \dim_{\mathbf{K}} F$.
•	f est un isomorphisme	*si et seulement si*	$\mathsf{Rg}\, f = n = p$.

Démonstration ▽

• D'après la **Formule du rang**, $p = \dim \mathsf{Im}\, a + \dim_{\mathbf{K}} \mathsf{Ker}\, a$.

Grâce au **Théorème** 21.13, nous en déduisons les équivalences :

$$\begin{aligned} a \text{ est injective} &\iff \mathsf{Ker}\, a = \{\vec{0}\} \\ &\iff \dim \mathsf{Ker}\, a = 0 \\ &\iff \dim \mathsf{Im}\, a = p \\ &\iff \mathsf{Rg}\, a = p. \end{aligned}$$

• D'après le **Théorème** 22.12, nous avons

$$\begin{aligned} a \text{ est surjective} &\iff \mathsf{Im}\, a = F_n \\ &\iff \dim \mathsf{Im}\, a = n \\ &\iff \mathsf{Rg}\, a = n. \end{aligned}$$

• Le dernier point découle des deux premiers. ▲

V How To

Déterminer la dimension

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, F, G deux sous-espaces vectoriels de E, $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs.

0.a Comment déterminer la dimension de E

- Vous connaissez un base $(\vec{e}_1, \ldots, \ldots, \vec{e}_n)$ de E. Alors $n = \dim_{\mathbf{K}} E$.
- Vous connaissez ou devinez un isomorphisme de E sur $\mathbf{K}^n$. Alors $n = \dim_{\mathbf{K}} E$.

0.b Comment déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel de E

- Si F est le sous-espace vectoriel engendré par une famille finie $\mathscr{F}$ de vecteurs, alors $\dim_{\mathbf{K}} F = \operatorname{Rg} \mathscr{F}$.
- Point de vue équations : si F est défini comme le noyau d'une application linéaire : la **Formule du rang** peut être utile.
- Point de vue paramétrage : si F est défini comme l'image d'une application linéaire : la **Formule du rang** peut être utile.
- Si $E = F+G$ s'écrit comme la somme de deux sous-espaces, appliquez alors le **Théorème des quat'zamis**22.13. Si vous savez de plus que F et G sont supplémentaires, alors

$$\dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{K}} F + \dim_{\mathbf{K}} G$$

- D'autres stratégies au prochain chapitre pour déterminer le rang d'une famille $\mathscr{F}$, d'une application linéaire.

Nouvelles méthodes pour de vieilles questions

Nous avons vu au chapitre précédent, comment prouver qu'une famille est libre ou génératrice. La dimension de E est donne des conditions nécessaires très utiles.
Soit E un $\mathbf{K}$-e.v. de dimension finie $n \in \mathbf{N}$.

0.c Comment montrer qu'une famille finie n'est pas génératrice

- Si $\operatorname{Card} \mathcal{G} < n$ ***Ne cherchez plus !*** $\mathcal{G}$ n'est pas génératrice, car n est le cardinal **minimal** pour une famille génératrice.

0.d Comment montrer qu'une famille finie n'est pas libre

- Si $\operatorname{Card} \mathcal{L} > \dim E$ ***Ne cherchez plus !*** $\mathcal{L}$ n'est pas libre car n est le cardinal **maximal** pour une famille libre.

0.e Comment montrer qu'une famille est une base

Soit $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n. Une condition nécessaire (**Théorème** 22.4) pour que $\mathscr{F}$ soit une base de E est $n = p$. Si tel est le cas, il vous suffit **au choix** :

- ▸ de montrer que $\mathscr{F}$ est libre (le plus facile)
- ▸ de montrer que $\mathscr{F}$ est génératrice.

0.f Comment montrer qu'une application linéaire est bijective

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies. D'après le **Corollaire** 22.8, une condition nécessaire pour que f soit un isomorphisme est que $\dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{K}} F$.

En ce cas, le **Théorème** 22.22 est incontournable : vous démontrez **au choix** que :

- ▸ f est injective. C'est le plus facile : il suffit de prouver que $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$.
- ▸ f est surjective.