PROGRAMME DE COLLE S21

NB : Le programme S21 porte sur celui de S20 plus ce qui suit !

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

■■■ Généralités sur les systèmes d'équations linéaires

Théorème*.— Un système (S) de n équations linéaires à p inconnues possède

- **ou bien** une infinité de solutions – on dit que (S) est **indéterminé** ;
- **ou bien** aucune solution – on dit que (S) est **incompatible** ;
- **ou bien** une unique solution.

Définition : *Deux systèmes (S_1) et (S_2) sonts dits **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.*

Proposition*.— Opérations élémentaires sur les lignes d'un système —. On obtient un système équivalent à (S) lorsqu 'on effectue sur les lignes les **opérations élémentaires** suivantes :

- **échanger l'ordre des lignes** L_i et L_j $\quad (L_i \leftrightarrow L_j)$,
- **multiplier la ligne** L_i **par une constante non nulle** $\lambda_i \in \mathbf{K}^\star$ $\quad (L_i \leftarrow \lambda_i\, L_i)$,
- **ajouter à la ligne** L_i **un multiple d'une autre ligne** L_j $(i \neq j)$ $\quad (L_i \leftarrow L_i + \lambda_j L_j)$.

■■■ Systèmes triangulaires

Définition : *Un système (T) de n équations à n inconnues est dit **triangulaire** supérieur lorsque*

$$\big(\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\big), \quad \big((i>j) \Rightarrow a_{i,j} = 0\big).$$

Théorème*.— Soit (T) un système triangulaire de n équations à n inconnues. Alors

(T) possède une unique solution
si et seulement si
tous les coefficients diagonaux de (T) sont non nuls.

Savoir-faire : résolution d'un système triangulaire par remontée.

■■■ Systèmes échelonnés

Théorème*.— Soit (E) un système échelonné. Alors

(E) est compatible
si et seulement si
chacune des $n-r$ équations auxiliaires est vérifiée.

Dans ce cas, (E) possède :

- une unique solution, *ssi* $r = p$
- une infinité de solutions *ssi* $r < p$.

$$(E)\ \begin{cases} \boxed{a_{1,1}}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,r}x_r + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \qquad\quad \boxed{a_{2,2}}x_2 + \cdots + a_{2,r}x_r + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad\qquad\quad \ddots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\quad \boxed{a_{r,r}}x_r + \cdots + a_{r,p}x_p = b_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_n \end{cases} \begin{matrix} \rceil \\ \text{r éqs} \\ \text{pples} \\ \rfloor \\ \rceil \\ n-r \\ \text{éqs} \\ \text{aux.} \\ \rfloor \end{matrix}$$

Savoir-faire : pour résoudre un système échelonné, passez – s'il y en a– les variables libres au second membre et résolvez par remontée.

■■■ Cas général

Théorème*.— Théorème Fondamental —.
Tout système d'équations linéaires est équivalent à un système échelonné.

Savoir-faire : la méthode d'élimination de **Gauss** (méthode du pivot partiel).

■■■ Struture de l'ensemble des solutions

Théorème*.— Tout système de n équations linéaires à p inconnues possède

- **ou bien** une infinité de solutions ;
- **ou bien** aucune solution ;
- **ou bien** une unique solution.

Proposition*.— $\mathcal{S}_o$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$ —.
Soit (S) un système de n équations linéaires à p inconnues. On note $\mathcal{S}_o$ l'ensemble des solutions du système homogène associé.

- $(0, \dots, 0)$ appartient à $\mathcal{S}_o$.
- $\forall x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{S}_o$, $\forall y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathcal{S}_o$, $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p) \in \mathcal{S}_o$.
- $\forall x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{S}_o$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p) \in \mathcal{S}_o$

Théorème*.— Structure de $\mathcal{S}$ —.
Soit (S) un système compatible de n équations linéaires à p inconnues.
Soit $x^\circ = (x_1^\circ, \dots, x_p^\circ) \in \mathbf{K}^p$ une solution particulière de (S) et notons $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_o$ les ensembles des solutions de (S) et de son système homogène associé (S_o). Alors

$$\forall x \in \mathbf{K}^p, \quad x \in \mathcal{S} \iff x - x^\circ \in \mathcal{S}_o$$

■■■ Systèmes de Cramer

Définition : *Un système de n équations linéaires à n inconnues possédant une unique solution est appelé un système de* **Cramer**.

Théorème*.— Cramer via Gauss —. Soit (S) un système *carré* de n équations à n inconnues.

(S) est de **Cramer** *ssi* (S) est équivalent à un système triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls

Théorème*.— Soit (S) un système de n équations linéaires à n inconnues. **Les ASSE :**

- (S) possède une unique solution, c'est-à-dire (S) est de **Cramer**.
- (S_o) possède une unique solution.
- Pour tout second membre b, le système (S_b) possède une unique solution.
- Pour tout second membre b, le système (S_b) possède au moins une solution.
- Pour tout second membre b, le système (S_b) possède au plus une solution.

Proposition*.— Formules de Cramer, $n = 2$ —. Soit (S) le système $\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array} \right.$. Alors

$$\text{(S) est de Cramer } \textit{ si et seulement si } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Dans ce cas, la solution (x_1, x_2) de (S) est donnée par les formules :

$$x_1 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \text{ et } x_2 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$