Chapitre 5

Primitives et équations différentielles linéaires

Sommaire

I Intégrales et primitives . . . 106
1 Primitives d'une fonction continue . . . 106
2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment . . . 106
3 Liens fondamentaux entre intégrales et primitives . . . 107
4 Méthodes de calcul d'une intégrale . . . 108
II Équations différentielles linéaires (EDL) . . . 112
1 Équation différentielle linéaire d'ordre $n \in \{1, 2\}$ . . . 112
2 Équation homogène associée à (E_n) . . . 112
3 Lien fondamental entre solutions de (E_n) et de (H_n) . . . 113
4 Principe de superposition . . . 113
5 Méthode de résolution . . . 114
III Équation différentielle linéaire d'ordre 1 . . . 114
1 Résolution de l'équation homogène . . . 114
2 Recherche d'une solution particulière . . . 116
3 Résolution de l'équation complète . . . 117
IV EDL d'ordre 2 à coefficients constants . . . 119
1 Résolution de l'équation homogène associée . . . 119
2 Recherche d'une solution particulière . . . 122
3 Problème de Cauchy d'ordre deux . . . 125
V COMPLÉMENTS : EDL d'ordre 2 à coefficients continus . . . 127
1 Définition . . . 127
2 Changement de fonction inconnue . . . 127
3 Changement de variable . . . 127

OBJECTIFS

Ils sont modestes, il s'agit essentiellement de

- ▷ connaître les primitives de quelques fonctions usuelles,
- ▷ de savoir déterminer les primitives d'une fonction au moyen d'une intégration par parties, ou par changement de variables.
- ▷ savoir résoudre les équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients continus,
- ▷ savoir résoudre les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants,

I Intégrales et primitives

Dans tout le chapitre $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et I est un intervalle non trivial de $\mathbf{R}$.

1 Primitives d'une fonction continue

1.a Définition

Définition : *Soit $f, F : I \to \mathbf{R}$, deux fonctions. On dit que F est une **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.*

Exemples : sur $\mathbf{R}^\star$

- si $n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\}$, une primitive de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$.
- si $n = -1$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbf{R}^\star$ est $x \mapsto \ln(|x|)$.

Proposition 5.1.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction.

- Deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante.
- Plus précisément, si F_0 est une primitive de f sur I, les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $F = F_0 + C$, où $C \in \mathbf{R}$ est une constante réelle.

Démonstration ▽
Soit F_1 et F_2 deux primitives de f sur l'intervalle I. Alors la différence $F_1 - F_2$ est dérivable sur I et $(F_1 - F_2)' = f - f = 0$. Il en résulte que $F_1 - F_2$ est constante sur I. ▲

1.b Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

Théorème 5.2.— Existence de primitive ❤ —. Toute fonction continue sur I possède des primitives sur I.

Notation : *une primitive quelconque de f est notée $\displaystyle\int^x f(t)\,dt$.*

2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

2.a Définition intuitive de l'intégrale

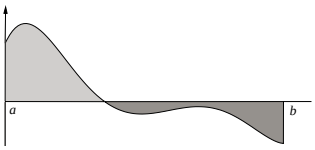
Définition : *Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$.*

- ▸ *Si f est positive, on définit l'intégrale de a à b de f, et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ l'aire de la portion du plan délimitée par le graphe de f et les droites d'équations $y = 0$, $x = a$ et $x = b$.*
- ▸ *Si f n'est pas positive, elle s'écrit $f = f^+ - f^-$, où f^+ et f^- sont continues et positives.*
  En ce cas, l'intégrale de a à b de f est définie par : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f^+(t)\,dt - \int_a^b f^-(t)\,dt$.

Remarque : dans cette définition, la continuité de f sur le **segment** $[a,b]$ est essentielle.

Illustration :

Dans la figure ci-contre $\int_a^b f(t)\,dt$ est l'aire *algébrique* de la région grisée : l'aire de la partie claire est comptée *positivement*, l'aire de la partie plus foncée est comptée *négativement*.



Définition : *Soit $f : [a,b] \to \mathbf{C}$ une fonction continue. On note $u = \mathfrak{Re}\, f$ $v = \mathfrak{Im}\, f$ ses parties réelles et imaginaires. On pose*

$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b [u(t) + i\,v(t)]\ dt = \int_a^b u(t)\ dt + i \int_a^b v(t)\ dt$$

Notation : *soit $f : I \to \mathbf{K}$ une fonction continue, $(a,b) \in I^2$. Si $a < b$, on convient de noter*

$$\int_a^b f(t)\ dt = -\int_b^a f(t)\ dt$$

2.b Propriétés fondamentales de l'intégrale

Théorème 5.3.— Soit $f, g : I \to \mathbf{K}$ deux fonctions continues sur un intervalle I, $(a,b) \in I^2$ des réels tels que $a \leq b$. Alors

- **Linéarité de l'intégrale**
  Si $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$, alors $\displaystyle\int_a^b (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(t)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt$
- **Relation de Chasles**
  Si $(a,b,c) \in I^3$, alors $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt.$
- **Positivité de l'intégrale**
  Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et f est positive sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geq 0.$
- **Croissance de l'intégrale**
  Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et $f \leq g$ sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt.$

3 Liens fondamentaux entre intégrales et primitives

3.a Théorème fondamental du calcul intégral ❤

Ce premier théorème fait le lien entre intégrales et primitives. Il est absolument essentiel !

Théorème 5.4.— Soit $f : I \to \mathbf{K}$ une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive *quelconque* de f sur I, alors pour tout couple $(a,b) \in I^2$

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Commentaires : ainsi, l'intégrale de a à b d'une fonction continue est la variation entre a et b d'une de ses primitives.

En pratique : vous utilisez ce **Théorème** pour tout calcul d'intégrale !

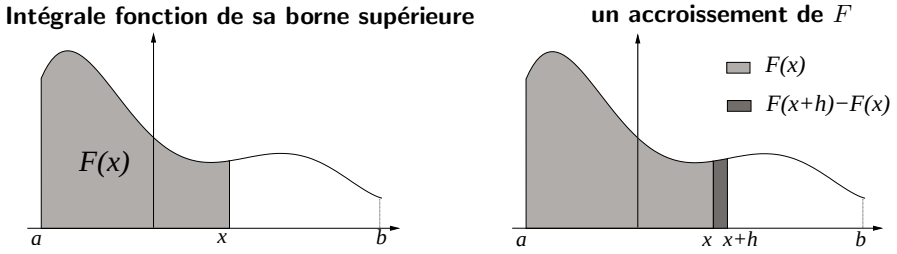
3.b Intégrale fonction de sa borne supérieure

Ainsi que nous venons de voir que la connaissance d'une primitive de f permet de calculer ses intégrales. Inversement, les primitives de f s'expriment à l'aide d'intégrales.

Considérons une fonction $f \in \mathcal{C}(I, \mathbf{K})$ continue sur un intervalle *–pas nécessairement un segment–* et $a \in I$ un point fixé dans I. Pour chaque valeur $x \in I$ fixée, $f_|$ est une fonction continue sur le segment $[a, x] \cup [x, a]$ et par conséquent l'intégrale $\int_a^x f(t)\,dt$ est bien définie.

Posons $$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Ce procédé définit une nouvelle fonction $F_a : I \to \mathbf{K}$ représentée par le schéma ci-dessous :



La fonction F_a ainsi construite est très importante puisqu'il s'agit d'une *primitive* de f sur I. Plus précisément :

Théorème 5.5.— Intégrale fonction de sa borne supérieure
Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbf{K})$, $a \in I$. On considère la fonction $F_a : I \to \mathbf{K}$ définie par

$$\boxed{\text{pour tout } x \in I, \qquad F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$$

Alors F_a est dérivable sur I et $F_a' = f$, autrement dit

$$\boxed{\text{pour tout } x \in I, \quad F_a'(x) = f(x)}$$

Démonstration ▽
Comme f est continue sur I, elle admet une primitive $F : I \to \mathbf{K}$. D'après le **théorème 5.4**, il s'ensuit que pour tout réel $x \in I$, on a

$$F_a(x) = \Big[F(t)\Big]_a^x = F(x) - F(a)$$

Il en résulte que F_a est dérivable comme somme de telles fonctions, et pour tout $x \in I$, $F_a'(x) = F'(x) = f(x)$. ▲

Remarques :

- en fait F_a est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
- lorsqu'on ne précise pas la valeur de la borne inférieure de l'intégrale, on retrouve l'expression d'une primivive quelconque de f, sur I, $x \mapsto \int^x f(t)\ dt$.

4 Méthodes de calcul d'une intégrale

Comme les primitives d'une fonction continues peuvent s'exprimer comme une intégrale (cf remarque ci-dessus) ces méthodes s'appliquent aussi au calcul de primitives.

4.a Intégration à vue

Il s'agit de déterminer une primitive de l'intégrande et d'appliquer le **Théorème** 5.4. Pour cela, il faut connaître le tableau des primitives usuelles, donné page 111 !

4.b Intégration par parties

Une conséquence, fort utile en pratique du **Théorème Fondamental du Calcul Intégral** est la méthode d'

Corollaire 5.6.— Intégration par parties —. Soit $(u,v) \in \mathcal{C}^1(I,\mathbf{R})^2$, alors pour tout couple $(a,b) \in I^2$,

$$\boxed{\int_a^b u'(t) \times v(t)\,dt = \Big[u(t) \times v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t) \times v'(t)\,dt.}$$

Démonstration ▽
Une primitive de $u' \times v + u \times v'$ est la fonction $u \times v$. D'après le **TFCI**, il en résulte que

$$\int_a^b \left[u' \times v + u \times v'\right]\,dt = \Big[u \times v\Big]$$

Le résultat en découle aisément par linéarité de l'intégrale. ▲

En pratique : vous utilisez une IPP pour intégrer un produit. Pour cela

1 choisissez quel facteur vous souhaitez intégrer et/ou quel factuer vous souhaitez dériver.

2 Identifiez u' et v, et posez

$$\left\| \begin{array}{ll} u' = \cdots & v = \cdots \\ u = \cdots & v' = \cdots \end{array} \right.$$

Vérifiez au passage que u et v sont de classe $\mathcal{C}^1([a,b])$,

3 Appliquez la formule d'IPP

Exercice : Calculez $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\ \sin(t)\,dt$

Exemple : les primitives de ln sont données par :

$$\int^x \ln(t)\ dt = x\ln(x) - x + C$$

4.c Intégration par changement de variable

Théorème 5.7.— Soit $f \in \mathcal{C}(J,\mathbf{R})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(I,J)$ telle que $\varphi(I) \subset J$. Alors pour tout couple $(a,b) \in I^2$

$$\boxed{\int_a^b f \circ \varphi(t) \times \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du}$$

Démonstration ▽
Soit F une primitive de f sur J. Alors d'après la règle de différentiation en chaîne (**Proposition** 3.16), nous avons

$$(F \circ \varphi)' = f \circ \varphi \times \varphi'$$

D'après le **Théorème** 5.4, il en résulte que
$\displaystyle\int_a^b f \circ \varphi(t) \times \varphi'(t)\,dt = \Big[F \circ \varphi\Big]_a^b = F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big) = \Big[F(u)\Big]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du.$ ▲

En pratique : la formule de changement de variable s'utilise dans les deux sens, c'est-à-dire

— soit pour calculer $\displaystyle\int_a^b f \circ \varphi(t) \times \varphi'(t)\,dt$

— soit pour calculer $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(u)\,du$

Sens direct : intégration à vue perçante

Ce sens est utile pour rédiger une intégration *à vue perçante*, c'est-à-dire lorsque vous reconnaissez "$\varphi'(t)\,dt$" :

En pratique : Pour calculer $\displaystyle\int_a^b f\circ\varphi(t)\,\varphi'(t)\,dt$ à l'aide du changement de variable $u=\varphi(t)$, la méthode est la suivante :

• Posez	$u=\varphi(t)$	
• Dérivez formellement,	$du=\varphi'(t)\,dt$,	pour calculer le nouvel élément de longueur infinitésimale
• Remplacez	$TOUT$	$\varphi(t)$ est remplacé par u, $\varphi'(t)\,dt$ par du et les bornes pour t par les bornes pour u.

Exercice : Calculez $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt$ à l'aide du changement de variable $u=\cos t$.

Solution ▽
la fonction cos *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbf{R}$*, le changement de variable proposé est licite.*

$$\left\|\begin{array}{ll}\textit{Posons} & u=\cos t.\\ \textit{Dérivons} & du=-\sin t\,dt,\end{array}\right.$$

Calculons les bornes pour u *: lorsque* $t=0$, $\cos t$ *vaut* 1, *lorsque* $t=\frac{\pi}{2}$, $\cos t$ *vaut* 0. *Il s'ensuit*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt=\int_1^0\frac{-du}{1+u^2}=\int_0^1\frac{du}{1+u^2}=\Big[\operatorname{Arctan} u\Big]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

▲

L'autre sens

En pratique : Pour calculer $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(u)\,du$ à l'aide du changement de variable $u=\varphi(t)$, la méthode est identique :

• Posez	$u=\varphi(t)$	
• Dérivez formellement,	$du=\varphi'(t)\,dt$,	pour calculer le nouvel élément de longueur infinitésimale
• Remplacez	$TOUT$	u est remplacé par $\varphi(t)$, du par $\varphi'(t)\,dt$ et les bornes pour u par les bornes pour t.

Exercice : Calculez $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-u^2}\,du$ à l'aide du changement de variables $u=\sin t$.

Solution ▽
La fonction sin *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *de* $[0,\pi/2]$ *sur* $[0,1]$*, nous pouvons effectuer le changement de variable* $u=\sin t$.

$$\left\|\begin{array}{ll}\textit{Posons} & u=\sin t.\\ \textit{Dérivons} & du=\cos t\,dt,\end{array}\right.$$

Comme $0=\sin 0$ *et* $1=\sin\pi/2$, *ce changement de variable conduit à*

$$\int_0^1\sqrt{1-u^2}\,du=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt.$$

Comme pour tout $t\in[0,\pi/2]$, $\cos t\geq 0$, *remarquons que* $\sqrt{1-\sin^2 t}=|\cos t|=\cos t$. *Par suite :*

$$\int_0^1\sqrt{1-u^2}\,du=\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}.$$

Nous venons de démontrer par le calcul que l'aire du quart de disque unité est $\frac{\pi}{4}$*... Bravo !* ▲

4.d Quelques primitives usuelles

fonction	Primitives	Intervalles de validité
$x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$I \subset \mathbf{R}$ si $\alpha \in \mathbf{N}$ $I \subset \mathbf{R}^{+\star}$ ou $I \subset \mathbf{R}^{-\star}$ si $\alpha \in \mathbf{Z}^-$, $I \subset \mathbf{R}^{+\star}$ si $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(\lvert x\rvert) + C$	$I \subset \mathbf{R}^{+\star}$ ou $I \subset \mathbf{R}^{-\star}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x + C$	$I \subset \mathbf{R}$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto x\ln(x) - x + C$	$I \subset \mathbf{R}^{+\star}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + C$	$I \subset \mathbf{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + C$	$I \subset \mathbf{R}$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto -\ln(\lvert\cos x\rvert) + C$	$I \subset \mathcal{D}_{tan}$
$x \mapsto \operatorname{ch}(x)$	$x \mapsto \operatorname{sh}(x) + C$	$I \subset \mathbf{R}$
$x \mapsto \operatorname{sh}(x)$	$x \mapsto \operatorname{ch}(x) + C$	$I \subset \mathbf{R}$
$x \mapsto \operatorname{th}(x)$	$x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x) + C$	$I \subset \mathbf{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + C$	$I \subset \mathbf{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$	$x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert + C$	$I \subset]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x) + C$	$I \subset]-1,1[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \mapsto \ln(\lvert x + \sqrt{x^2-1}\rvert) + C$	$I \subset]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \mapsto \ln((x + \sqrt{1+x^2})) + C$	$I \subset \mathbf{R}$

II Équations différentielles linéaires (EDL)

1 Équation différentielle linéaire d'ordre $n \in \{1, 2\}$

Une équation différentielle d'ordre n est une équation d'inconnue une fonction y qui met en jeu la variable t, la fonction y, ainsi que ses dérivées successives jusqu'à l'ordre n : y', $y^{(n)}$.

Exemple : L'équation

$$t^2y'' - 3ty' + 4y = t^4$$

est une équation différentielle du second ordre.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux équations différentielles linéaires d'ordre 1 ou 2 :

Définition : *On appelle* ***équation différentielle linéaire d'ordre*** n *une équation différentielle de la forme :*

$$y' + a_0(t)y = b(t) \qquad (\textit{équation différentielle linéaire du premier ordre}) \qquad (E_1)$$
$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \qquad (\textit{équation différentielle linéaire du second ordre}) \qquad (E_2)$$

Vocabulaire : *dans l'équation* (E_n), *(*$n = 1$ *ou* $n = 2$*)*

- *les fonctions* $a_k : I \to \mathbf{K}$ *sont continues sur* I*. On les appelle les* ***coefficients*** *de* (E_n)*.*
- *la fonction* $b : I \to \mathbf{K}$ *est continue sur* I*. On l'appelle le* ***second membre****.*
- *la fonction* $y : I \to \mathbf{K}$ *est* n*-fois dérivable sur* I*. On l'appelle la* ***fonction inconnue****.*

Exemples :

- l'équation $y'' - 2y' + y = 2\mathrm{ch}\, t$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
- l'équation $y' + 2ty = 2te^{-t^2}$ est une équation diférentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients continus.
- l'équation différentielle d'ordre 1 $ty' = y(y + 1) + t^2$ n'est pas une équation différentielle linéaire.

Définition :

- *Une* ***solution*** *de* (E_1) *sur* $\mathbf{K}$ *est une fonction* $f : I \to \mathbf{K}$ *telle que*
  - f *est dérivable dans* I*.*
  - *Pour tout* $t \in I$, $f'(t) + a_0(t)f(t) = b(t)$
- *Une* ***solution*** *de* (E_2) *sur* $\mathbf{K}$ *est une fonction* $f : I \to \mathbf{K}$ *telle que*
  - f *est* 2*-fois dérivable dans* I*.*
  - *Pour tout* $t \in I$, $f''(t) + a_1(t)f'(t) + a_0(t)f(t) = b(t)$

Résoudre l'équation (E_n) *sur* $\mathbf{K}$*, c'est déterminer l'ensemble des solutions* $f : I \to \mathbf{K}$ *de* (E_n)

Vocabulaire : *on dit aussi "intégrer "* (E_n)*, car en pratique, la résolution se ramène à un calcul de primitive.*

Remarque : une solution de (E_n) est nécessairement de classe $\mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$.

2 Équation homogène associée à (E_n)

Définition : *on appelle* ***équation différentielle linéaire homogène*** *associée à* (E_n) *et on note* (H_n) *l'équation*

$$y' + a_0(t)y = 0 \qquad (\textit{équation différentielle linéaire homogène du premier ordre}) \qquad (H_1)$$
$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \qquad (\textit{équation différentielle linéaire homogène du second ordre}) \qquad (H_2)$$

Commentaires : en clair, (E_n) et (H_n) ont les mêmes coefficients, mais le second membre de (H_n) est nul.

L'intérêt que nous portons à (H_n) est motivé par la structure algébrique des solutions de (H_n).
Remarquez tout d'abord que (H_n) possède des solutions, puisque la fonction constante égale à 0 est clairement solution. De plus, l'ensemble des solutions de (H_n) est **stable par combinaison linéaire** :

Théorème 5.8.— Structure de l'ensemble des solutions de (H_n) **—.** Soit $f_1, f_2 : I \to \mathbf{K}$ des solutions de (H_n), $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$. Alors

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 : I \to \mathbf{K} \text{ est solution de } (H_n).$$

Vocabulaire : *l'ensemble des solutions de (H_n) est un exemple d'espace vectoriel.*

Démonstration ▽
Les deux cas étant similaires, je ne traite que le cas $n = 2$. Soit $f_1, f_2 : I \to \mathbf{K}$ des solutions de (H_2), $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$. Par définition, f_1 et f_2 sont 2 fois dérivables sur I. Par conséquent, la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ l'est aussi. De plus, pour tout $t \in I$

$$\begin{array}{rl} \lambda_1 \times & \left\| \begin{array}{lllll} f_1''(t) & +a_1(t)f_1'(t) & +a_0(t)f_1(t) & = & 0 \quad (L_1) \\ f_2''(t) & +a_1(t)f_2'(t) & +a_0(t)f_2(t) & = & 0 \quad (L_2) \end{array} \right. \\ \lambda_2 \times & \end{array}$$

Par linéarité de la dérivation, $\lambda_1 \cdot (L_1) + \lambda_2 \cdot (L_2)$ donne :

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \big[(\lambda_1 f_1)''(t) + a_1(t)(\lambda_1 f_1)'(t) + a_0(t)(\lambda_1 f_1)(t)\big] + \big[(\lambda_2 f_2)''(t) + a_1(t)(\lambda_2 f_2)'(t) + a_0(t)(\lambda_2 f_2)(t)\big] \\ & = & [\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2]''(t) + a_1(t)[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2]'(t) + a_0(t)[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2](t) \end{array}$$

ce qui prouve que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de (H_2). ▲

3 Lien fondamental entre solutions de (E_n) et de (H_n)

Théorème 5.9.— Soit $f_0 : I \to \mathbf{K}$ une solution de (E_n). Alors pour toute fonction $f : I \to \mathbf{K}$, n-fois dérivable sur I,

$$\boxed{f \text{ est solution de } (E_n) \textit{ si et seulement si } f - f_0 \text{ est solution de } (H_n)}$$

Vocabulaire : *f_0 est appelée une* ***solution particulière***[1] *de (E_n).*

Démonstration ▽
Les deux cas étant similaires, je ne traite que le cas $n = 2$. Soit f_0 une solution de (E_n).

CN Si f est solution de (E_2), alors la fonction $f - f_0$ est 2-fois dérivable dans I comme somme de telles fonctions et pour tout $t \in I$,

$$\left\| \begin{array}{lllll} f''(t) & +a_1(t)f'(t) & +a_0(t)f(t) & = & b(t) \quad (L) \\ f_0''(t) & +a_1(t)f_0'(t) & +a_0(t)f_0(t) & = & b(t) \quad (L_0) \end{array} \right.$$

En soustrayant membre à membre ces deux égalités, il en résulte que $f - f_0$ est solution de (H_2).

CS réciproquement, si $f - f_0$ est solution de (H_2) alors la fonction f est 2-fois dérivable dans I comme somme de telles fonctions et pour tout $t \in I$,

$$\left\| \begin{array}{rrrrrl} (f-f_0)''(t) & +a_1(t)(f-f_0)'(t) & +a_0(t)(f-f_0)(t) & = & 0 & (L) \\ f_0''(t) & +a_1(t) & f_0'(t) & +a_0(t) & f_0(t) = b(t) & (L_0) \end{array} \right.$$

Il suffit d'ajouter membre à membre ces égalités pour obtenir que f est solution de (E_2). ▲

En pratique, on utilise la version suivante de ce théorème :

Théorème 5.10.— Solution générale de (E_n) ❤ —. Soit $f_0 : I \to \mathbf{K}$ une solution de (E_n). Alors

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_n) \text{ sur } \mathbf{K} \text{ sont les fonctions de la forme } f = f_0 + h, \text{ où } h : I \to \mathbf{K} \text{ est solution de } (H_n)}$$

4 Principe de superposition

Lorsque le second membre b se décompose sous la forme $b = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$, on peut chercher une solution particulière grâce au

1. en opposition à ≪solution générale≫

Théorème 5.11.— Principe de superposition —. Soit $f_1, f_2 : I \to \mathbf{K}$ des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre n :

$$\begin{array}{lllllll} y^{(n)} & +a_{n-1}(t)y^{(n-1)} & +\cdots & +a_1(t)y' & +a_0(t)y & = & b_1(t) \\ y^{(n)} & +a_{n-1}(t)y^{(n-1)} & +\cdots & +a_1(t)y' & +a_0(t)y & = & b_2(t) \end{array}$$

Alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)$$

5 Méthode de résolution

Dans la suite du chapitre, nous étudierons en plus grand détail les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2, mais nous pouvons déjà dégager une méthode générale de résolution :

1 **Expression de la solution générale de l'équation homogène** (H_n)
Des formules seront données dans les prochains paragraphes, suivant la forme de (E_n). Dans tous les cas, l'ensemble des solutions de (H_n) est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$.

2 **Recherche d'une solution particulière de** (E_n)
Des méthodes pratiques de recherche seront exposées dans les prochaines paragraphes.

3 **Expression de la solution générale de l'équation complète** (E_n)
La solution générale de (E_n) s'écrit $f = f_0 + h$, où f_0 est une solution particulière et $h : I \to \mathbf{K}$ est la solution générale de (H_n).

III Équation différentielle linéaire d'ordre 1

Cette partie du chapitre est la plus importante d'un point de vue théorique car elle servira de base à l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre quelconque $n \in \mathbf{N}^\star$ en deuxième année.

Nous nous intéressons ici aux équations différentielles linéaires d'ordre 1 :

$$y' + a(t)y = b(t) \qquad (E_1)$$
$$y' + a(t)y = 0 \qquad (H_1)$$

où $a, b : I \to \mathbf{K}$ sont des fonctions continues sur I. Pour résoudre (E_1), nous suivons la démarche générale développée précédemment :

- **Résolution de l'équation homogène** (H_1)
- **Recherche d'une solution particulière**
- **Expression de la solution générale de** (E_1)

1 Résolution de l'équation homogène

1.a Un résultat préliminaire

Pour résoudre l'équation homogène (H_1), nous nous inspirons de la résolution dans le cas des coefficients constants :

Lemme 5.12.— Soit $\alpha : I \to \mathbf{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $h : t \mapsto e^{\alpha(t)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\boxed{\text{pour tout } t \in I, \quad h'(t) = \alpha'(t) \times h(t)}$$

Commentaires : Autrement dit, h est solution dans I de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, à coefficient continu $-\alpha'$:

$$y' - \alpha'(t)y = 0$$

Démonstration ▽
Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, le résultat découle immédiatement de la règle de dérivation en chaîne. Supposons donc que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. En ce cas, φ se décompose sous la forme

$$\alpha(t) = u(t) + iv(t)$$

où $u, v : I \to \mathbf{R}$ sont les parties réelle et imaginaire de α. Comme α est de classe $\mathcal{C}^1$, il en va de même pour u et v. De plus, pour tout $t \in I$,

$$\exp \circ \alpha(t) = e^{u(t)} \times e^{iv(t)} = e^{u(t)} \times \big(\cos v(t) + i \sin v(t)\big).$$

Il s'ensuit que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I car ses partie réelle et imaginaire le sont et que pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} h'(t) &= u'(t)e^{u(t)} \times \big(\cos v(t) + i \sin v(t)\big) + e^{u(t)} \times \big(-v'(t) \sin v(t) + iv'(t) \cos v(t)\big) \\ &= \big(u'(t) + iv'(t)\big) \times e^{u(t)} \times \big(\cos v(t) + i \sin v(t)\big) \\ &= \alpha'(t)e^{\alpha(t)}. \end{aligned}$$

▲

1.b Solution générale de (H_1)

Si α est choisi de sorte que $\alpha' = -a$, h est donc solution de (H_1). Plus précisément :

Théorème 5.13.— Solution générale de (H_1) —. Soit $a : I \to \mathbf{K}$ une fonction continue. Notons $A : I \to \mathbf{K}$ une primitive de a sur I. Alors les solutions de l'équation homogène :

$$y' + a(t)y = 0 \qquad (H_1)$$

sont les fonctions de la forme

$$\boxed{h(t) = Ce^{-A(t)}, \quad C \in \mathbf{K}}$$

Remarques :

1. comme $a : I \to \mathbf{K}$ est une fonction continue sur l'intervalle I, le **théorème 5.2** garantit l'existence de primitives de a sur I.
2. Mise à part la solution triviale $h = 0$, les solutions de (H_1) ne s'annulent pas sur I.

Démonstration ▽
Comme $a : I \to \mathbf{K}$ est continue, elle admet des primitives sur I d'après le **théorème fondamental du calcul intégral** (cf **théorème 5.2**). Soit $A : I \to \mathbf{K}$ une primitive de a sur I.

- Soit $C \in \mathbf{K}$ une constante et h la fonction définie sur I par $h(t) = Ce^{-A(t)}$. Comme A est de classe $\mathcal{C}^1$, h l'est aussi d'après le **Lemme** *above*. De plus, pour tout $t \in I$,

$$\begin{array}{rr|rcl} a(t)\times & \Big\| & h(t) & = & Ce^{-A(t)} \\ 1\times & \Big\| & h'(t) & = & -Ca(t)e^{-A(t)} \end{array}$$

  Ainsi, pour tout $t \in I$, $h'(t) + a(t) \times h(t) = 0$, h est solution de (H_1).

- Réciproquement, soit h une solution de (H_1) et définissons la fonction $\varphi : I \to \mathbf{K}$ par $\varphi(t) = h(t) \times e^{A(t)}$. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I comme produit de telles fonctions et pour tout $t \in I$,

$$\varphi'(t) = \big[\underbrace{h'(t) + a(t)h(t)}_{=0}\big] e^{A(t)}$$

  Comme par hypothèse h est solution de (H_1), ,$h'(t) + a(t)h(t)$ est nul pour tout $t \in I$. Il en résulte que φ est une fonction constante sur l'intervalle I. Il existe donc $C \in \mathbf{K}$ telle que $\varphi = C$. Par construction de φ, ceci revient à dire que

$$\text{pour tout } t \in I, \quad h(t) = Ce^{-A(t)}.$$

▲

En pratique : Pour résoudre $y' + a(t)y = 0$,
1 vous déterminez **une** primitive A de a sur I.
2 les solutions sont les fonctions de la forme $h(t) = C\,e^{-A(t)}$, pour $C \in \mathbf{K}$.
La résolution d'une telle équation se ramène donc essentiellement à un calcul de primitive.

Exercice : Résoudre sur $\mathbf{R}^{+\star}$ l'équation

$$ty' + \alpha y = 0.$$

Solution ▽
Sur $I = \mathbf{R}^{+\star}$, l'équation proposée est équivalente à $y' + \dfrac{\alpha}{t}y = 0$.
Notons $a : I \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $a(t) = \dfrac{\alpha}{t}$. a est continue sur I et une primitive de a est $A(t) = \ln(t^\alpha)$. Par conséquent, la solution générale de l'équation (H_1) est donnée par

$$h(t) = Ce^{-A(t)} = \frac{C}{t^\alpha}.$$

▲

1.c Cas d'une équation homogène à coefficient constant

En Sciences Physiques, on a souvent affaire à des équations homogènes d'ordre 1 à coefficient constant :

$$y' + ay = 0$$

En ce cas, $a(t) = a$ et on peut choisir comme primitive $A(t) = at$. On obtient alors

Corollaire 5.14.— Cas d'une équation homogène à coefficient constant
Les solutions sur $\mathbf{K}$ de l'équation différentielle linéaire homogène $(H_1) : y' + ay = 0$ sont les fonctions de la forme

$$\boxed{h(t) = Ce^{-at},\ \text{où } C \in \mathbf{K}}$$

2 Recherche d'une solution particulière

2.a Méthode de la variation de la constante

Soit $a, b : I \to \mathbf{K}$ deux fonctions continues sur I, on cherche une solution particulière de l'équation complète :

$$y' + a(t)y = b(t) \qquad (E_1)$$

Nous savons que les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme

$$h(t) = Ce^{-A(t)}, \quad C \in \mathbf{K},\ \text{où } A : I \to \mathbf{K} \text{ est une primitive de } a \text{ sur } I.$$

Cherchons une solution particulière de (E_1) sous la forme

$$f_0(t) = c(t)e^{-A(t)},\ \text{où } c : I \to \mathbf{K} \text{ est une fonction de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I.$$

Pour tout $t \in I$, on a donc :

$$\left\|\begin{array}{rrcl} a(t)\times & f_0(t) & = & c(t)e^{-A(t)} \\ +1\times & f_0'(t) & = & \big[c'(t) - a(t)c(t)\big]e^{-A(t)} \\ & f_0'(t) + a(t)f_0(t) & = & c'(t)e^{-A(t)} \end{array}\right.$$

Par conséquent,

$$f \text{ est solution de } (E_1) \textit{ si et seulement si } \text{pour tout } t \in I,\ c'(t)e^{-A(t)} = b(t), \text{ soit } c'(t) = b(t)e^{A(t)}.$$

Comme la fonction $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ est continue sur I elle admet d'après le **théorème fondamental du calcul intégral** des primitives sur I.
Une solution particulière de (E_1) est donc obtenue en prenant pour $c : I \to \mathbf{K}$ une primitive de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$.

2.b Existence d'une solution particulière

Le théorème suivant résume les résultats obtenus :

Théorème 5.15.— Soit $a, b : I \to \mathbf{K}$ des fonctions continues,
On note $A : I \to \mathbf{K}$ une primitive de a sur I
$c : I \to \mathbf{K}$ une primitive de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ sur I.

Une solution particulière de (E_1) est la fonction $f_0 : I \to \mathbf{K}$ définie par

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in I, \quad f_0(t) = c(t)e^{-A(t)}}$$

Remarque : Les résultats de ce théorème ne doivent pas être connus, seule la démarche consistant à chercher une solution particulière sous la forme $f_0(t) = c(t)e^{-A(t)}$ est exigée.

Vocabulaire : *cette méthode de recherche de solution particulière s'appelle la* **méthode de variation de la constante**.

En pratique : pour déterminer une solution particulière de (E_1),

- regardez s'il n'y a pas une solution évidente (constante, ou trigo, ou exp)
- lorsque rien ne vous saute aux yeux, utilisez la méthode de la variation de la constante.

Exercice : Résolvez

1. l'équation $(1 + t^2)y' + 2ty = 1$ sur $\mathbf{R}$,
2. l'équation $(1 - t^2)y' - ty = 1$ sur $]-1, 1[$,
3. l'équation $y' - ty = t$ sur $\mathbf{R}$.

3 Résolution de l'équation complète

3.a Expression de la solution générale

Résumons les étapes précédentes :

Théorème 5.16.— Soit $a, b : I \to \mathbf{K}$ des fonctions continues,
On note $A : I \to \mathbf{K}$ une primitive de a sur I
$c : I \to \mathbf{K}$ une primitive de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ sur I.

Les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient continu (E_1) sont les fonctions définies sur I par

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in I, \quad f(t) = c(t)e^{-A(t)} + Ce^{-A(t)}, \quad C \in \mathbf{K}}$$

Remarque : l'ensemble des solutions a une structure de droite affine. En particulier, toute équation différentielle linéaire d'ordre 1 admet une infinité de solutions.

3.b Le problème de Cauchy

En conséquence du théorème précédent, l'équation (E_1) admet une infinité de solutions qui dépendent d'un paramètre $C \in \mathbf{K}$.
En jouant sur la valeur de ce paramètre, il est possible d'imposer une condition supplémentaire comme par exemple, une valeur donnée (y_0) à l'instant initial (t_0), c'est le **problème de Cauchy** :

$$\text{Déterminez une fonction } f : I \to \mathbf{K} \text{ telle que } \begin{cases} y' + a(t)y &= b(t) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

Théorème 5.17.— Existence et unicité de la solution du problème de Cauchy
Soit $a, b : I \to \mathbf{K}$ deux fonctions continues, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbf{K}$ fixés. On note $A : I \to \mathbf{K}$ une primitive de a sur I. Alors le problème de Cauchy

$$(C) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} y' + a(t)y & = & b(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

admet une unique solution $f : I \to \mathbf{K}$. Elle est donnée par :

$$\boxed{\text{pour tout } t \in I, \quad f(t) = \left[y_0 e^{A(t_0)} + \int_{t_0}^{t} b(u) e^{A(u)}\, du \right] \; e^{-A(t)}}$$

Exemple : L'unique solution du problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{rcl} y' - y & = & 0 \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$ est la fonction exponentielle.

Démonstration ▽

- **Existence**
  Notons pour alléger $c_0(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(u)e^{A(u)}\, du$ l'unique primitive (TFCI) de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ qui s'annule à l'*instant* t_0, $C_0 = y_0 e^{A(t_0)}$ et définissons $f_0 : I \to \mathbf{K}$ par

  $$\text{Pour tout } t \in I, \quad f_0(t) = c_0(t)\, e^{-A(t)} + C_0\, e^{-A(t)}$$

  D'après le **Théorème** précédent, f_0 est solution de l'équation différentielle (E_1). De plus,

  $$f_0(t_0) = c_0(t_0)e^{-A(t_0)} + C_0\, e^{-A(t_0)} = y_0.$$

- **Unicité**
  Soit (f, g) un couple de solutions *of the famous Cauchy problem*. Alors $f - g$ est solution de l'équation différentielle linéaire homogène

  $$y' + a(t)y = 0 \qquad ((H_1))$$

  De plus $(f - g)(t_0) = 0$. Or d'après le **Théorème** 5.13, la seule solution de l'équation homogène (H_1) qui s'annule est la fonction identiquement nulle. Il s'ensuit que $f = g$. ▲

Exercice : Résoudre sur $]\pi/2; \pi/2[$ le problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{rcl} y' \cos t + 2 \sin t y & = & 1 + \sin^2 t \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$.

IV EDL d'ordre 2 à coefficients constants

Soit $(a,b) \in \mathbf{K}^2$ et $c : I \to \mathbf{K}$ continue. On s'intéresse aux équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants :

$$y'' + ay' + by = c(t) \qquad (E_2)$$
$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (H_2)$$

La résolution de (E_2) suit la méthode générale :

- **Résolution de l'équation homogène**
- **Recherche d'une solution particulière**
- **Expression de la solution générale**

1 Résolution de l'équation homogène associée

1.a Équation caractéristique

On commence par rechercher les solutions exponentielles de l'équation homogène (H_2)

Lemme 5.18.— Soit $\alpha \in \mathbf{K}$. Alors

f_α est solution de (H_2) *si et seulement si* α est solution de l'**équation caractéristique** :

$$r^2 + ar + b = 0 \qquad (EC)$$

Démonstration ▽
Soit $\alpha \in \mathbf{K}$. Alors pour tout $t \in I$,

$$\begin{array}{rl|rcl} b\times & \| & f_\alpha(t) & = & e^{\alpha t} \\ a\times & \| & f'_\alpha(t) & = & \alpha e^{\alpha t} \\ 1\times & \| & f''_\alpha(t) & = & \alpha^2 e^{\alpha t} \end{array}$$

Ainsi, pour tout $t \in I$, $f''_\alpha(t) + af'_\alpha(t) + bf_\alpha(t) = \big(\alpha^2 + a\alpha + b\big)e^{\alpha t}$. Il s'ensuit que f_α est solution de (H_2) si et seulement si $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$, *i.e.* α est solution de (EC). ▲

Corollaire 5.19.— Notons $\Delta = a_4^2 b$ le discriminant de l'équation caractéristique.

- **si** $\Delta \neq 0$, (EC) possède deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbf{C}$.
  Les fonctions $t \mapsto e^{r_1 t}$ et $t \mapsto e^{r_2 t}$ sont deux solutions *a priori* complexes de (H_2).
- **si** $\Delta = 0$, (EC) possède une racine double r_0 dans $\mathbf{C}$.
  Les fonctions $t \mapsto e^{r_0 t}$ et $t \mapsto t\, e^{r_0 t}$ sont deux solutions complexes de (H_2).

Démonstration ▽

- Si le discriminant est non nul, le résultat découle directement du **Lemme** précédent.
- Si $\Delta = 0$, notons r_0 la racine double de (EC). D'après le **Lemme** , $t \mapsto e^{r_0 t}$ est solution de (H_2). Notons $h(t) = t\, e^{r_0 t}$. Alors

$$\begin{array}{rl|rcl} b\times & \| & h(t) & = & t\, e^{r_0 t} \\ a\times & \| & h'(t) & = & \big(1 + r_0 t\big)e^{r_0 t} \\ 1\times & \| & h''(t) & = & \big(2r_0 + r_0^2 t\big)e^{r_0 t} \end{array}$$

  Il en résulte que $h''(t) + ah'(t) + bh(t) = \big[t(\underbrace{r_0^2 + ar_0 + b}_{=0}) + (\underbrace{2r_0 + a}_{=0})\big]e^{r_0 t}$. Or r_0 étant racine double de (EC), $r_0^2 + ar_0 + b = 0$ et $2r_0 + a = 0$ [2]. Ainsi, $te^{r_0 t}$ est solution de (H_2). ▲

2. la somme des racines vaut $-a$

1.b Résolution de (H_2) dans le cadre complexe

En discutant suivant la valeur du discriminant de (EC), nous avons trouvé deux solutions de (H_2), h_1 et h_2. Par stabilité de l'ensemble des solutions par combinaisons linéaires, toute combinaison linéaire de h_1 et h_2 est encore solution de (H_2). En fait, toute solution de (H_2) est de cette forme. Plus précisément :

Théorème 5.20.— Solution de (H_2), $(\mathbf{K}=\mathbf{C})$ —. Soit $(a,b)\in\mathbf{C}^2$. On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (H_2).

- si $\Delta\neq 0$, les solutions de (H_2) sont les fonctions définies sur I par

$$\boxed{\text{pour tout } t\in I \quad h(t)=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t},\ \ (C_1,C_2)\in\mathbf{C}^2}$$

  où r_1 et r_2 sont les racines complexes de (EC).
- si $\Delta=0$, les solutions de (H_2) sont les fonctions définies sur I par

$$\boxed{\text{pour tout } t\in I \quad h(t)=(C_1+C_2t)e^{r_0t},\ \ (C_1,C_2)\in\mathbf{C}^2}$$

  où r_0 est la racine (complexe) double de (EC).

Vocabulaire : *dans les deux cas, les solutions de (H_2) sont les combinaisons linéaires de deux fonctions h_1 et h_2.*

- *$(\Delta\neq 0)$ $h_1:t\mapsto e^{r_1t}$, $h_2:t\mapsto e^{r_2t}$,*
- *$(\Delta=0)$ $h_1:t\mapsto e^{r_0t}$, $h_2:t\mapsto te^{r_0t}$.*

Le couple (h_1,h_2) est appelé un ***système fondamental de solutions****.*

Démonstration $\triangledown$

On note r_1,r_2 les racines (distinctes ou confondues) de (EC).

Pour résoudre (H_2), nous allons effectuer un changement de fonction inconnue. On cherche h sous la forme

$$h(t)=e^{r_1t}y_0(t)$$

h est deux fois dérivable si et seulement si y_0 l'est et dans ce cas, pour tout $t\in I$, on a :

$$\left\|\begin{array}{rrcl} b\times & h(t) & = & y_0(t)e^{r_1t}\\ a\times & h'(t) & = & \big[y_0'(t)+r_1y_0(t)\big]e^{r_1t}\\ 1\times & h''(t) & = & \big[y_0''(t)+2r_1y_0'(t)+r_1^2y_0(t)\big]e^{r_1t}\\ & h''(t)+ah'(t)+bh(t) & = & \big[y_0''(t)+(2r_1+a)y_0'(t)+(r_1^2+ar_1+b)y_0(t)\big]e^{r_1t}\end{array}\right.$$

Ainsi

$$\begin{array}{rll} h \text{ est solution de } (H_2) & ssi & \text{pour tout } t\in I,\ y_0''(t)+\underbrace{(2r_1+a)}y_0'(t)+\underbrace{(r_1^2+ar_1+b)}_{=0}y_0(t)=0\\ & ssi & \text{pour tout } t\in I,\ y_0''(t)+\underbrace{(2r_1+a)}_{=0?}y_0'(t)=0\end{array}$$

À présent, il convient de discuter suivant la nullité de Δ :

- si $\Delta\neq 0$, alors $r_1\neq r_2$ et $r_1+r_2=-a$, de sorte que $a+2r_1=r_1-r_2$. Il s'ensuit que

$$\begin{array}{rll} h \text{ est solution de } (H_2) & ssi & \text{pour tout } t\in I,\ \left\{\begin{array}{l} z_0(t)=y_0'(t)\\ z_0'+(2r_1+a)z_0=0\end{array}\right.\\ & ssi & \text{il existe } C_2\in\mathbf{C} \text{ telle que pour tout } t\in I,\ \left\{\begin{array}{l} z_0(t)=y_0'(t)\\ z_0(t)=C_2e^{-(a+2r_1)t}\end{array}\right.\\ & ssi & \text{il existe } C_2\in\mathbf{C} \text{ telle que pour tout } t\in I,\ \left\{\begin{array}{l} z_0(t)=y_0'(t)\\ z_0(t)=C_2e^{r_2t-r_1t}\end{array}\right.\\ & ssi & \text{il existe } (C_1,C_2)\in\mathbf{C}^2 \text{ tel que pour tout } t\in I,\ y_0(t)=C_2e^{r_2t-r_1t}+C_1\\ & ssi & \text{il existe } (C_1,C_2)\in\mathbf{C}^2 \text{ tel que pour tout } t\in I,\ h(t)=C_2e^{r_2t}+C_1e^{r_1t}\end{array}$$

- si $\Delta = 0$, alors r_1 est racine double et $2r_1 + a = 0$. Il s'ensuit que

$$\begin{array}{lll} h \text{ est solution de } (H_2) & ssi & \text{pour tout } t \in I,\ y_0''(t) = 0 \\ & ssi & \text{il existe } C_2 \in \mathbf{C} \text{ telle que pour tout } t \in I,\ y_0'(t) = C_2 \\ & ssi & \text{il existe } (C_1, C_2) \in \mathbf{C}^2 \text{ tel que pour tout } t \in I,\ y_0(t) = C_1 + C_2 t \\ & ssi & \text{il existe } (C_1, C_2) \in \mathbf{C}^2 \text{ tel que pour tout } t \in I,\ h(t) = (C_1 + C_2 t)e^{r_1 t} \end{array}$$

▲

Exercice : Résoudre sur $\mathbf{C}$ $y'' + (1+2i)y' + (i-1)y = 0$

1.c Résolution de (H_2) dans le cadre réel

Lorsque les coefficients (a, b) sont réels, on peut résoudre dans $\mathbf{C}$, mais on s'intéresse le plus souvent aux solutions réelles de (H_2).

Théorème 5.21.— Solution de (H_2), ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$) —. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (H_2).

- si $\Delta > 0$, les solutions réelles de (H_2) sont les fonctions définies sur I par

$$\boxed{\text{pour tout } t \in I \quad h(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},\ \ (C_1, C_2) \in \mathbf{R}^2}$$

  où r_1 et r_2 sont les racines réelles de (EC).
- si $\Delta = 0$, les solutions réelles de (H_2) sont les fonctions définies sur I par

$$\boxed{\text{pour tout } t \in I \quad h(t) = (C_1 + C_2 t)e^{r_0 t},\ \ (C_1, C_2) \in \mathbf{R}^2}$$

  où r_0 est la racine réelle double de (EC).
- si $\Delta < 0$, les solutions réelles de (H_2) sont les fonctions définies sur I par

$$\boxed{\text{pour tout } t \in I \quad h(t) = e^{\rho t}\big(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)\big)\ \ (C_1, C_2) \in \mathbf{R}^2}$$

  où $r = \rho \pm i\omega$ sont les racines complexes conjuguées de (EC) présentées en notation algébrique.

Démonstration ▽
Les deux premiers cas se traitent exactement de le même manière que dans le cadre complexe.
Supposons donc que $\Delta < 0$. Notons $r_1 = \rho + i\omega$ et $r_2 = \rho - i\omega$ les deux racines complexes conjuguées de (EC). D'après le **Théorème** précédent, les solutions complexes de (H_2) sont définies par :

$$\text{pour tout } t \in I, \quad \tilde{h}(t) = \tilde{C}_1 e^{r_1 t} + \tilde{C}_2 e^{r_2 t} = e^{\rho t}\big(\tilde{C}_1 e^{i\omega t} + \tilde{C}_2 e^{-i\omega t}\big).$$

Parmi ces dernières, les solutions réelles sont celles pour lesquelles $\tilde{C}_1$ et $\tilde{C}_2$ sont conjuguées. En ce cas, en notant $C_1 = 2\mathfrak{Re}\,\tilde{C}_1$ et $C_2 = -2\mathfrak{Im}\,\tilde{C}_1$, nous obtenons

$$h(t) = e^{rt}\big(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)\big).$$

▲

Exercice : Résoudre sur $\mathbf{R}$

1. $y'' + 4y' + 4y = 0$,
2. $y'' - 7y' + 10y = 0$,
3. $y'' + \omega^2 y = 0$, pour $\omega \in \mathbf{R}^\star$,
4. $y'' - \omega^2 y = 0$, pour $\omega \in \mathbf{R}^\star$.

Solution ▽
les solutions de ces équations sont les fonctions définies sur **R** *par :*

1. $(C_1 + C_2 t)\, e^{-2t}$
2. $C_1\, e^{5t} + C_2\, e^{2t}$
3. $C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) = A\, \cos(\omega t + \varphi)$, *où* $(A, \varphi) \in \mathbf{R}^2$.
4. $C_1 e^t + C_2 e^{-t}$.

2 Recherche d'une solution particulière

Comme dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants, nous recherchons des solutions particulières de l'équation complète

$$y'' + ay' + by = c(t) \qquad (E_2)$$

en discutant suivant le type du second membre.

2.a Équation $y'' + ay' + by = c$

Lorsque le second membre est constant et $b \neq 0$, il y a une solution constante $f_0 = \dfrac{c}{b}$.

Exemple : Circuit R, L, C série.

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = \frac{E}{LC}$$

que l'on écrit aussi

$$u'' + \frac{\omega_0}{Q_0}u' + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E$$

La constante E est une solution particulière évidente et l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q_0}r + \omega_0^2 = 0$$

a pour discriminant $\Delta = 4\omega_0^2\left(\dfrac{1}{4Q_0^2} - 1\right) = \dfrac{\omega_0^2}{Q_0^2}\,(1 - 4Q_0^2)$.

D'où la discussion suivante :

- si $Q_0 < \dfrac{1}{2}$, on parle d'**amortissement fort**, alors $\Delta > 0$ et $u(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + E$ où $r_1 = -\dfrac{\omega_0}{2Q_0}\big(-1 + \sqrt{1 - 4Q_0^2}\big)$ et $r_2 = -\dfrac{\omega_0}{2Q_0}\big(-1 - \sqrt{1 - 4Q_0^2}\big)$.
- si $Q_0 = \dfrac{1}{2}$, on parle d'**amortissement critique**, alors $\Delta = 0$ et $u(t) = (C_1 + C_2 t)e^{r_0 t} + E$ où $r_0 = -\dfrac{\omega_0}{2Q_0}$.
- si $Q_0 > \dfrac{1}{2}$, on parle d'**amortissement faible**, alors $\Delta < 0$ et $u(t) = E + e^{-\frac{\omega_0}{2Q_0}t}\big(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)\big)$ où $\omega = \dfrac{\omega_0}{2Q_0}\sqrt{4Q_0^2 - 1}$.

2.b Équation $y'' + ay' + by = P_m(t)$

Lorsque le second membre est une fonction polynomiale, l'équation

$$y'' + ay' + by = P_m(t) \qquad (E_2)$$

possède une solution particulière polynomiale. Plus précisément :

Théorème 5.22.— second membre polynomial —. Soit $P_m : I \to \mathbf{K}$ une fonction polynomiale de degré $m \in \mathbf{N}$.

- ▸ si $b \neq 0$, l'équation (E_2) possède une solution particulière de la forme $t \mapsto Q_m(t)$
- ▸ si $b = 0$ et $a \neq 0$, l'équation (E_2) possède une solution particulière de la forme $t \mapsto t\, Q_m(t)$
- ▸ si $b = 0$ et $a = 0$, l'équation (E_2) possède une solution particulière de la forme $t \mapsto t^2\, Q_m(t)$,

où $Q_m(t)$ est une fonction polynomiale de degré m.

Démonstration ▽

- si $b = 0$, l'équation (E_2) s'écrit $y'' + ay' = P_m(t)$ Effectuons le changement de fonction inconnue $z = y'$.

$$y \text{ est solution de } (E_2) \textit{ si et seulement si } \left\{ \begin{array}{l} z = y' \\ z' + az = P_m(t) \quad (E_1) \end{array} \right.$$

  Les résultats de la section **II** s'appliquent :
  - si $a \neq 0$ il existe une solution particulière de (E_1) de la forme $z_0(t) = Q_m(t)$
  - si $a = 0$, il existe une solution particulière de (E_1) de la forme $z_0(t) = tQ_m(t)$

  On obtient alors une solution particulière de (E_2) de la forme annoncée, en prenant une primitive de z_0.
- si $b \neq 0$, on procède par identification des coefficients, comme dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1. ▲

Exercice : Résolvez sur **R** l'équation

$$y'' + y' + y = t^2 + 1$$

Solution ▽
$(t^2 - 2t + 1) + e^{-t/2}\left[C_1 \cos(\sqrt{3}t/2) + C_2 \sin(\sqrt{3}t/2)\right]$. ▲

2.c Équation $y'' + ay' + by = P_m(t)e^{\alpha t}$

Lorsque le second membre est une fonction polynomiale-exponentielle, l'équation

$$y'' + ay' + by = P_m(t)e^{\alpha t} \qquad (E_2)$$

possède une solution particulière polynomiale-exponentielle. Le degré du polynôme dépend du fait que α soit ou non racine de l'équation caractéristique :

$$r^2 + ar + b = 0 \qquad (EC)$$

Plus précisément

Théorème 5.23.— second membre polynôme-exponentielle —. Soit $P_m : I \to \mathbf{K}$ une fonction polynomiale de degré $m \in \mathbf{N}$ et $\alpha \in \mathbf{K}$

- si α n'est pas racine de l'équation caractéristique, l'équation (E_2) possède une solution particulière de la forme $t \mapsto Q_m(t)\, e^{\alpha t}$
- si α est racine simple de l'équation caractéristique, l'équation (E_2) possède une solution particulière de la forme $t \mapsto t\, Q_m(t)\, e^{\alpha t}$
- si α est la racine double de l'équation caractéristique, l'équation (E_2) possède une solution particulière de la forme $t \mapsto t^2\, Q_m(t)\, e^{\alpha t}$

où $Q_m(t)$ est une fonction polynomiale de degré m.

Démonstration ▽
Cherchons une solution particulière de (E_2) sous la forme $y(t) = Q(t)\, e^{\alpha t}$. Pour tout $t \in I$, nous avons

$$\begin{array}{rl|rcl} b\times & \Big\| & y(t) & = & Q(t)\, e^{\alpha t} \\ a\times & \Big\| & y'(t) & = & \big(Q'(t) + \alpha Q(t)\big)\, e^{\alpha t} \\ 1\times & \Big\| & y''(t) & = & \big(Q''(t) + 2\alpha Q'(t) + \alpha^2 Q(t)\big)\, e^{\alpha t} \end{array}$$

Il s'ensuit que pour tout $t \in I$,

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = \left[Q''(t) + (a + 2\alpha)Q'(t) + (\alpha^2 + a\alpha + b)Q(t)\right] e^{\alpha t}$$

Par conséquent y est solution de (E_2) *si et seulement si* Q est solution de

$$z'' + (a + 2\alpha)z' + (\alpha^2 + a\alpha + b)z = P_m(t) \qquad (F_2)$$

Le **Théorème** précédent conduit à la discussion suivante :

- si α n'est pas racine de (EC), alors (F_2) possède une solution particulière de la forme $Q : t \mapsto Q_m(t)$

- si α est racine simple de (EC), (F_2) possède une solution particulière de la forme $Q : t \mapsto t\,Q_m(t)$
- si α est racine double de (EC), (F_2) possède une solution particulière de la forme $Q : t \mapsto t^2\,Q_m(t)$.

Pour conclure, il suffit de se rappeler que pour tout $t \in I$, $y(t) = Q(t)e^{\alpha t}$. ▲

Exercice : Résolvez sur $\mathbf{R}$ les équations

1. $y'' - 2y' + y = t\,e^{-t}$

2. $y'' - 3y' + 2y = t\,e^{t}$

Solution ▽

les solutions de ces équations sont les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ *par*

1. $\frac{1}{4}(t+1)e^{-t} + (C_1 + C_2 t)\,e^{t}$

2. $-(\frac{1}{2}t^2 + t)e^{t} + C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}$

2.d Équation $y'' + ay' + by = P_m(t)\,\cos(\omega t)$

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $P_m : I \to \mathbf{R}$ une fonction polynomiale à coefficients *réels* et ω un *réel*. On cherche les fonctions r*éelles*, solutions de l'équation

$$y'' + ay' + by = P_m(t)\,\cos(\omega t) \qquad (E_{21})$$
$$y'' + ay' + by = P_m(t)\,\sin(\omega t) \qquad (E_{22})$$

La méthode consiste à *passer en complexes* :

Théorème 5.24.— second membre polynôme-trigo —. Soit a, b, ω des réels, et $P_m : I \to \mathbf{R}$ une fonction polynomiale de degré $m \in \mathbf{N}$ à coefficients réels. On note

$$y'' + ay' + by = P_m(t)\,e^{i\omega t} \qquad (\tilde{E}_2)$$

- une solution particulière réelle de l'équation (E_{21}) est obtenue en prenant la partie réelle d'une solution complexe de l'équation $(\tilde{E}_2)$.
- une solution particulière réelle de l'équation (E_{22}) est obtenue en prenant la partie imaginaire d'une solution complexe de l'équation $(\tilde{E}_2)$.

Démonstration ▽

Soit $\tilde{y}$ une solution complexe de l'équation

$$(\tilde{E}_2) \qquad y'' + ay' + by = P_m(t)\,e^{i\omega t}$$

Comme les coefficients sont réels, $\overline{\tilde{y}}$ est solution de

$$(\overline{\tilde{E}_2}) \qquad y'' + ay' + by = P_m(t)\,e^{-i\omega t}$$

D'après le principe de superposition, et les formules d'Euler, il en résulte que $\mathfrak{Re}\,\tilde{y} = \dfrac{\tilde{y} + \overline{\tilde{y}}}{2}$ est solution de

$$(E_2) \qquad y'' + ay' + by = P_m(t)\,\cos(\omega t),$$

tandis que $\mathfrak{Im}\,\tilde{y} = \dfrac{\tilde{y} - \overline{\tilde{y}}}{2i}$ est solution de

$$(E_2) \qquad y'' + ay' + by = P_m(t)\,\sin(\omega t).$$

▲

Exercice : Résolvez sur $\mathbf{R}$ les équations

1. $y'' + y = t\,\cos 2t$

2. $y'' + 2y' + 2y = \cos t + \sin t.$

Solution ▽

Les solutions de ces équations différentielles linéaires d'ordre 2 sont les fonctions de la forme :

1. $-\frac{1}{3}t\cos(2t) + \frac{4}{9}\sin(2t) + C_1\cos t + C_2 \sin t.$

2. $\frac{1}{5}(3\sin t - \cos t) + e^{-t}(C_1\cos t + C_2 \sin t).$

2.e Second membre continu : cas général

Soit $(a,b) \in \mathbf{K}^2$ et $c : I \to \mathbf{K}$ une fonction continue. On considère l'équation :

$$y'' + ay' + by = c(t) \qquad (E_2)$$

Notons r une racine (éventuellement complexe) de l'équation caractéristique :

$$r^2 + ar + b = 0 \qquad (EC)$$

On cherche une solution particulière de (E_2) sous la forme $y(t) = z(t)e^{rt}$.

$$\begin{array}{l} b\times \\ a\times \\ 1\times \end{array} \left\| \begin{array}{rcl} y(t) &=& z(t)e^{rt} \\ y'(t) &=& \big[z' + rz\big]e^{rt} \\ y''(t) &=& \big[z'' + (2rz' + r^2 z\big]e^{rt} \end{array} \right.$$

Ainsi, nous avons les équivalences

$$\begin{array}{rcll} y \text{ sol } (E_2) & \iff & \big[z'' + (a+2r)z'\big]e^{rt} = c(t) & \\ & \iff & z'' + (a+2r)z' = c(t)e^{-rt} & \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} z' &=& w \\ w' + (a+2r)w &=& c(t)e^{-rt} \end{array} \right. & (E_1) \end{array}$$

Ainsi, z' doit être solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient continu. Ainsi que nous l'avons vu, cette équation admet donc (au moins) une solution w_0, obtenue par exemple à l'aide de la méthode de la variation de la constante. Notons z_0 une primitive de w_0 sur I. D'après les équivalences ci-dessus z_0 est donc une solution particulière de l'équation

$$z'' + (a+2r)z' = c(t)e^{-rt}$$

Finalement, la fonction $y_0 = z_0 e^{rt}$ est une solution particulière de (E_2).
Résumons les résultats obtenus :

Théorème 5.25.— Soit $(a,b) \in \mathbf{K}^2$ et $c : I \to \mathbf{K}$ une fonction continue. L'équation du deuxième degré, à coefficients constants

$$y'' + ay' + by = c(t) \qquad (E_2)$$

admet des solutions.

Nb : ce résultat est *Hors-programme* mais la démarche (changement de fonction inconnue) est à retenir ... elle sera utilisée lors de la résolution d'équations linéaires du deuxième degré à coefficients continus.

Démonstration ▽

- Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, le preuve est ci-dessus.
- si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, il suffit de considérer la partie réelle d'une solution complexe.

▲

3 Problème de Cauchy d'ordre deux

3.a Expression de la solution générale

Étant donné $(a,b) \in \mathbf{K}^2$, $c : I \to \mathbf{K}$ une fonction continue, on considère l'équation

$$y'' + ay' + by = c(t) \qquad (E_2)$$

(E_2) admet une infinité de solutions. En effet, elle admet d'après le théorème précédent une solution particulière f_0, tandis que l'équation homogène associée admet une infinité de solutions engendrée par un système fondamental de solutions (h_1, h_2). Finalement :

Théorème 5.26.— Solution générale de (E_2) —. Les solutions de (E_2) sur $\mathbf{K}$ sont les fonctions définies sur I par

$$\text{Pour tout } t \in I, \quad f(t) = f_0(t) + C_1 h_1(t + C_2 h_2(t), \quad \text{où } (C_1, C_2) \in \mathbf{K}^2$$

Commentaires : l'ensemble des solutions de (E_2) a une structure de plan affine.

3.b Le problème de Cauchy

Comme la solution générale dépend de deux paramètres $(C_1, C_2) \in \mathbf{K}^2$, il est possible d'imposer deux conditions supplémentaires. Plus précisément,

Théorème 5.27.— Existence et unicité de la solution au problème de Cauchy —. Pour tout $t_0 \in I$ et $(y_0, y_0') \in \mathbf{K}^2$ le **problème de Cauchy d'ordre 2** :

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{c} y'' + ay' + by = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \quad y'(t_0) = y_0' \end{array} \right.$$

admet une solution unique.

NB : la démonstration qui suit est *hors programme*.

Démonstration $\triangledown$
La solution générale de (E_2) s'écrit :

$$f(t) = f_0(t) + C_1 h_1(t) + C_2 h_2(t), \quad t \in I$$

où $(C_1, C_2) \in \mathbf{K}^2$ et h_1 et h_2 sont deux solutions fondamentales de l'équation homogène associée (H_2). Suivant les cas, nous avons

- $h_1(t) = e^{r_1 t}$ et $h_2(t) = e^{r_2 t}$
- $h_1(t) = e^{r_0 t}$ et $h_2(t) = t\, e^{r_0 t}$
- $h_1(t) = e^{rt}\cos(\omega t)$ et $h_2(t) = e^{rt}\sin(\omega t)$

Or

$$(C) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} f(t_0) & = & y_0 \\ f'(t_0) & = & y_0' \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} C_1 h_1(t_0) & + C_2 h_2(t_0) = y_0 - f_0(t_0) \\ C_1 h_1'(t_0) & + C_2 h_2'(t_0) = y_0' - f_0'(t_0) \end{array} \right.$$

On vérifie alors que dans chacun des cas ci-dessus, ce système admet un unique couple solution (C_1, C_2). $\blacktriangle$

V COMPLÉMENTS : EDL d'ordre 2 à coefficients continus

L'étude des équations différentielles linéaires d'ordre 2 n'est *pas au programme* cette année. Néanmoins certaines se ramènent à la résolution des cas précédemment étudiés.

1 Définition

Soit $a, b, c : I \to \mathbf{K}$ des fonctions continues sur I. On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t). \qquad (E_2)$$

Exemple : $y'' + (1+t^2)y' + (t-1)y = 1$

Pour une telle équation différentielle, il n'y a pas d'équation caractéristique.

En pratique : Pour résoudre (E_2), on se ramène aux cas précédemment étudiés au moyen

- d'un changement de fonction inconnue,
- d'un changement de variable.

2 Changement de fonction inconnue

Cette méthode de résolution a déjà été utilisée lors de la recherche d'une solution particulière à l'aide de la méthode de la variation de la constante (E_1).
Dans le cadre des équations différentielles linéaires d'ordre 2, elle permet de se ramener

- à résoudre 2 fois une équation différentielle linéaire d'ordre 1,
- à résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

2.a Mise en œuvre

Soit (E) l'équation $(1+t^2)y'' + 2ty' = 0$.
On pose naturellement $z = y'$. On se ramène ainsi à la résolution du système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcll} y' & = & z & (1) \\ (1+t^2)z + 2tz & = & 0 & (2) \end{array} \right.$$

La résolution de (2) conduit à $z = \dfrac{C}{1+t^2}$. Puis la résolution de (1) donne

$$y(t) = C\mathrm{Arctan}\, t + D.$$

Exercice : Résolvez sur $\mathbf{R}$ l'équation $(1+t^2)y'' + 4ty' + (1-t^2)y = 0$ au moyen du changement de fonction inconnue $z(t) = (1+t^2)y(t)$

3 Changement de variable

Un changement de variable est parfois donné par l'énoncé. Il permet de se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

3.a Mise en œuvre

Résolvons sur $\mathbf{R}^{+\star}$ l'équation

$$t^2y'' - 2ty' + 2y = \ln t \qquad (E)$$

au moyen du changement de variable $x = \ln t$.
Soit $y : \mathbf{R}^{+\star} \to \mathbf{R}$ une fonction deux fois dérivable. Considérons la fonction $z : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie implicitement par

$$y(t) = z(\ln t),$$

c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbf{R}$, $z(x) = y(e^x)$. Alors

$$\left\| \begin{array}{rrcl} 2\times & y(t) & = & z(\ln t) \\ -2t\times & y'(t) & = & z'(\ln t) \times \dfrac{1}{t} \\ t^2\times & y''(t) & = & z''(\ln t) \times \dfrac{1}{t^2} - z'(\ln t) \times \dfrac{1}{t^2} \end{array} \right.$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbf{R}^{+\star}$

$$t^2y''(t) - 2ty'(t) + 2y(t) = z''(\ln t) - 3z'(\ln t) + 2z(\ln t).$$

Par conséquent y est solution de (E) *si et seulement si* $\left\{ \begin{array}{rcll} y(t) & = & z(\ln t) & (1) \\ z''(x) - 3z'(x) + 2z(x) & = & x & (2) \end{array} \right.$.

z est donc solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (2). La solution générale de cette équation est

$$z(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

En reportant dans (1), nous obtenons finalement l'expression de la solution générale de (E) :

$$\text{pour tout } y \in \mathbf{R}^{+\star}, \quad y(t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln t + C_1t + C_2t^2.$$

Exercice : Résoudre sur $\mathbf{R}$, au moyen du changement de variable $x = \operatorname{Arctan} t$ l'équation

$$(E) \qquad (1+t^2)y'' + 2t(1+t^2)y' + y = 0.$$