PROGRAMME DE COLLE S26

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

REPRÉSENTATIONS MATRICIELLES EN DIMENSION FINIE

■■■ Rang d'une matrice

Proposition*.— Rang d'une matrice —. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice à p colonnes notées $A_1, \ldots, A_p$. Notons $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p)$ les vecteurs canoniquement associés aux colonnes de A et $a \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A. Alors $\mathsf{Rg}\, a = \mathsf{Rg}\,(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p)$. On pose

$$\boxed{\mathsf{Rg}\, A = \mathsf{Rg}\, a = \mathsf{Rg}\,(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p)}$$

Proposition*.— Rang de deux matrices équivalentes —. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Pour toutes matrices carrées inversibles $P \in GL_p(\mathbf{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbf{K})$,

$$\boxed{\mathsf{Rg}\left(Q^{-1} \times A \times P\right) = \mathsf{Rg}\, A}$$

Théorème*.— Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $r \leq \min(n,p)$. Alors

A est de rang r
si et seulement si
il existe un couple $(P,Q) \in GL_p(\mathbf{K}) \times GL_n(\mathbf{K})$ tel que $A = Q^{-1} \times J_{n,p,r} \times P$

$$J_{n,p,r} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \hline 0 & & & 0 & 0 & & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

Proposition.— Invariance du rang par opérations élémentaires —. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On ne change pas le rang d'une matrice lorsqu'on :

- échange deux lignes (*resp.* deux colonnes) de A ;
- remplace une ligne (*resp.* colonne) de A par un multiple non nul de cette ligne (*resp.* colonne) ;
- ajoute à une ligne (*resp.* colonne) un multilple d'une autre ligne (*resp.* colonne).

Savoir-faire : calculer le rang d'une matrice par opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes.

Proposition.— Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, alors A et ${}^tA$ ont même rang.

Théorème.— Caractérisation des matrices carrées inversibles —. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, une matrice carrée d'ordre n.

$$\boxed{A \text{ est inversible } \textit{ si et seulement si } \mathsf{Rg}\, A = n}$$

■■■ Représentation des familles de vecteurs

Définition : Matrice d'une famille de vecteurs dans une base —. *Soit E un $\mathbf{K}$-e.v. de dim finie muni d'une base $\mathcal{E}$. La matrice représentative $\mathbf{Mat}_{\mathcal{E}}(\vec{a}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ d'un vecteur a de E est la matrice-colonne dont les coefficients sont les coordonnées de $\vec{a}$ dans la base $\mathcal{E}$. Plus généralement, on définit la matrice $\mathbf{Mat}_{\mathcal{E}}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ représentative d'une famille de p vecteurs en rangeant leur coordonnées dans la base $\mathcal{E}$ en colonnes.*

Proposition.— Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E.
L'application

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & E & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ & \vec{x} & \mapsto & \mathbf{Mat}_{\mathcal{E}}(\vec{x}) \end{array}$$

qui à tout vecteur $\vec{x}$ de E_n associe sa matrice-colonne représentative est un isomorphisme de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.

Théorème*.— Caractérisation matricielle des bases —. Soit E un $\mathbf{K}$-e.v. de dim finie et $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E. Soit $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ une famille de n vecteurs de E. Notons $A = \mathbf{Mat}_{\mathcal{E}}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$. Alors

$$\boxed{\mathcal{A} \text{ est une base de } E \;\; \textit{ssi} \;\; A \text{ est inversible } \textit{ssi } \mathsf{Rg}\, A = n}$$

Théorème*.— Calcul du rang d'une famille de vecteurs —. Soit E_n un **K**-e.v. de dim finie muni d'une base $\mathcal{E} = \left(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\right)$ et $\mathcal{A} = \left(\vec{a}_1; \ldots; \vec{a}_p\right)$ une famille vecteurs de E_n. Alors

$$\boxed{\operatorname{Rg}(\mathcal{A}) = \operatorname{Rg} \mathbf{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A}).}$$

▪▪▪ Représentation matricielle des applications linéaires

Définition : Matrice d'une application linéaire dans des bases —. *Soit E_p et F_n des e.v. de dim finie munis des bases $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ et $\mathcal{F}$. On définit la matrice représentative de $a \in \mathcal{L}(E_p, F_n)$. $\mathbf{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ par*

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{F}}(a(\vec{e}_1), a(\vec{e}_2), \ldots, a(\vec{e}_n))$$

Théorème.— Soit E_p et F_n des **K**-espaces vectoriels de dimensions finies p et n. **Fixons** $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des bases de E_p et F_n. Alors l'application

$$\begin{array}{cccc} \Psi : & \mathcal{L}(E_p, F_n) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \\ & a & \mapsto & \mathbf{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) \end{array}$$

est un isomorphisme de **K**-espaces vectoriels.

Théorème*.— Calcul de l'image d'un vecteur, matrice représentative d'une composée —. Soit E, F ,G des **K**-e.v. de dim finies de bases respectives $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $a \in \mathcal{L}(E, F)$, $b \in \mathcal{L}(F, G)$ et $\vec{x} \in E$. Alors

$$\boxed{\mathbf{Mat}_{\mathcal{F}}(a(\vec{x})) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) \times \mathbf{Mat}_{\mathcal{E}}(\vec{x}) \text{ et } \mathbf{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(b \circ a) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(b) \times \mathbf{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)}$$

Théorème*.— Calcul du rang d'une application linéaire —. Soit E et F des **K**-e.v. de dim finies munis de bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, et $a \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\boxed{\operatorname{Rg}(a) = \operatorname{Rg} \mathbf{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a).}$$

Théorème*.— Caractérisation matricielle des isomorphismes —. Soit E et F des **K** -e.v. de même dimension n, de bases respectives $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ et $a \in \mathcal{L}(E, F)$. On note $A = \mathbf{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$. Alors

$$\boxed{a \text{ est un isomorphisme de } E \text{ sur } F \quad \textit{ssi} \quad A \text{ est inversible } \textit{ssi} \operatorname{Rg} A = n}$$

En ce cas $\mathbf{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(a^{-1}) = A^{-1}$.

▪▪▪ Formules de changement de bases

Définition : Matrice de passage —. *Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E. On appelle* ***matrice de passage*** *de la base $\mathcal{E}$ vers la base $\mathcal{E}'$, et on note $P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ la matrice représentative de $\mathcal{E}'$ dans la base $\mathcal{E}$. On a :*

$$\boxed{P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} = \mathbf{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}') = \mathbf{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(Id_E)}$$

Remarque : en particulier, $P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ est inversible et $\left(P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}}$

Théorème.— Formules de changement de base —. Soit E, F des **K**-e.v. de dim finies, $\mathcal{E}$,$\mathcal{E}'$ deux bases de E, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ deux bases de F, $P = P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ et $Q = P_{\mathcal{F}\to\mathcal{F}'}$.

- Soit $\vec{x} \in E$ un vecteur de E. On note $X = \mathbf{Mat}_{\mathcal{E}}(\vec{x})$ et $X' = \mathbf{Mat}_{\mathcal{E}'}(\vec{x})$. Alors

$$X' = P^{-1} \times X$$

- Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On note $A = \mathbf{Mat}_{\mathcal{E}}(a)$ et $A' = \mathbf{Mat}_{\mathcal{E}'}(a)$. Alors

$$A' = P^{-1} \times A \times P$$

- Soit $a \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E vers F. On note $A = \mathbf{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$ et $A' = \mathbf{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(a)$. Alors

$$A' = Q^{-1} \times A \times P$$