TECHNIQUES & MÉTHODES S25

NB : cette fiche reprend les techniques nécessaires **minimales**; elle ne constitue donc pas un objectif, mais un prérequis !

ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

■■■ Calculer la dimension d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, F, G deux sous-espaces vectoriels de E, $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs.

Comment déterminer la dimension de E

- la méthode standard consiste à appliquer le **Théorème de la dimension**

  1 je construis une base de $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \ldots, \vec{e}_n)$ de E.

  2 alors $\dim E = \text{Card } \mathcal{B} = n$.
- je connais ou je construis un isomorphisme de E vers un espace vectoriel de référence F. Alors $\dim E = \dim F$.

Comment déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel de E

- Si F est le sous-espace vectoriel engendré par une famille finie $\mathcal{F}$ de vecteurs, alors $\dim F = \text{Rg}\,\mathcal{F}$.
- Point de vue équations : si F est défini comme le noyau d'une application linéaire : la **Formule du rang** peut être utile.
- Point de vue paramétrage : si F est défini comme l'image d'une application linéaire : la **Formule du rang** peut être utile.
- Si $E = F + G$ s'écrit comme la somme de deux sous-espaces, j'applique le **Théorème des quatre dimensions**. Si de plus que F et G sont supplémentaires, alors

$$\dim E = \dim F + \dim G$$

- D'autres stratégies au prochain chapitre pour déterminer le rang d'une famille $\mathcal{F}$, d'une application linéaire.

■■■ Sous-espaces supplémentaires

Comment montrer que deux sev sont supplémentaires

J'utilise la **caractérisation des sev supplémentaires en dim finie**. Il s'agit de prouver

1 F et G s'intersectent transversalement : $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$

2 les dimensions de F et G se "supplètent" $\dim F + \dim G = \dim E$.

Comme construire un supplémentaire

Dans un ev de dim finie E tout sev F possède des supplémentaires. Pour en construire voici comment je peux procéder :

1 je construis une base $\mathcal{L}$ de F. D'après le **théorème de la base incomplète**, il existe une famille $\mathcal{G}$ de vecteurs de E telle que

$$\mathcal{B} = \mathcal{L} \cup \mathcal{G} \text{ est une base de } E$$

2 je pose $G = \text{Vect}(\mathcal{G})$ de sorte que

$$E = F \oplus G$$

Exercice 42 : On se place dans $\mathbf{R}^3$. Déterminez une base et un supplémentaire de $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, où $\vec{u} = (-1, 1, 0)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$ et $\vec{w} = (1, 1, 1)$. *réponse : $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ car $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. La sous-famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de F. On la complète en une base de $\mathbf{R}^3$ avec $(1, 0, 0)$. $G = \text{Vect}(1, 0, 0)$ est un supplémentaire de F.*

■■■ Familles de vecteurs en dimension finie

Nous avons vu au chapitre précédent, comment prouver qu'une famille est libre ou génératrice. La dimension de E donne des conditions nécessaires très utiles.
Soit E un $\mathbf{K}$-e.v. de dimension finie $n \in \mathbf{N}$.

Comment montrer qu'une famille finie n'est pas génératrice ou libre

- Si $\text{Card } \mathcal{G} < n$ alors $\mathcal{G}$ n'est pas génératrice, car n est le cardinal **minimal** pour une famille génératrice.
- Si $\text{Card } \mathcal{L} > \dim E$ alors $\mathcal{L}$ n'est pas libre car n est le cardinal **maximal** pour une famille libre.

Comment compléter une famille libre en une base

Soit E un $\mathbf{K}$ -ev de dimension finie rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Soi $\mathcal{L} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ une famille libre de vecteurs de E. D'après le **Théorème de la Base Incomplète** $\mathcal{L}$ peut être complétée en une base de E. En pratique, on complète $\mathcal{L}$ à l'aide de vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

Comment montrer qu'une famille est une base

Soit $\mathcal{B}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie et connue n. La **caractérisation des bases en dimension finie** est incontournable. Pour prouver que $\mathcal{B}$ est une base de E

1 je vérifie que $\mathsf{Card}\ (\mathcal{B}) = \mathsf{dim}\,(E) = n$.

2 je montre que $\mathcal{B}$ est libre (maximale).

Exercice 43 : Soit $a_0, a_1,\ dots, a_n\ n+1$ réels distincts. On note $L_0,\ L_1,\ \ldots,\ L_n$ les polynômes interpolateurs de Lagrange relatifs à $a_0, a_1,\ dots, a_n$. Montrez que $\mathcal{L} = (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $E = \mathbf{R}_n[X]$. *réponse :* Tout d'abord note que $\mathsf{Card}\ (\mathcal{L}) = n+1 = \mathsf{dim}\,\mathbf{R}_n[X]$. On montre que $\mathcal{L}$ est libre. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tels que $(V)\quad \lambda_0 L_0(X) + \lambda_1 L_1(X) + \cdots + \lambda_n L_n(X) = 0$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Comme $L_j(a_k) = \delta_{j,k}$, j'obtiens directement en évaluant (V) en a_k que $\lambda_k = 0$. Ainsi $\mathcal{L}$ est libre maximale dans E c'est donc une base de E.

■■■ Applications linéaires en dimension finie

Comment montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies. La **caractérisation des isomorphismes en dim finie** est incontournable. Pour prouver que f est un isomorphisme de E sur F.

1 je vérifie que $\mathsf{dim}\,E = \mathsf{dim}\,F$.

2 je montre que $f : E \to F$ est injective (en vérifiant que son noyau est réduit à $\{\vec{0}_E\}$).

Comment déterminer image et noyau d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie n rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Pour déterminer image et noyau de f,

1 je détermine d'abord $\mathsf{Ker}\,f$. C'est l'ensemble des solutions de l'équation vectorielle $f(\vec{x}) = \vec{0}$. J'en déduis une base $\mathcal{L} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ de $\mathsf{Ker}\,f$.

2 d'une part, je sais que l'image de f est engendrée par les images des vecteurs de $\mathcal{B}$.

$$\mathsf{Im}\,f = \mathsf{Vect}\,(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n))$$

D'autre part, je sais d'après la **Formule du rang** que $\mathsf{Im}\,f$ est de dimension $n - p$. J'obtiens une base de $\mathsf{Im}\,f$ en choisissant $n - p$ vecteurs linéairement indépendants parmi $f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n)$.

Exercice 44 : Déterminez l'image et le noyau de l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associée à $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

réponse : le noyau de f est la droite vectorielle engendrée par $(2, 1, 1)$ donc $\mathsf{dim\,Ker}\,f = 1$, donc $\mathsf{dim\,Im}\,f = \mathsf{Rg}\,f = 2$. L'image de f est le plan vectoriel engendré par $(-1, 3, -2)$ et $(1, -2, 1)$ (car c'est une famille libre maximale de $\mathsf{Im}\,f$).