Chapitre 28

Ensembles finis et dénombrements

Sommaire

I Ensembles finis, ensembles dénombrables 710
1 Cardinal des ensembles finis 710
2 Application de la notion de cardinal à l'égalité des ensembles 711
3 Application de la notion de cardinal à l'étude de l'in-/sur-/bi-jectivité 712
4 Ensembles dénombrables 714
II Dénombrement 715
1 Réunions d'ensembles 715
2 Produits cartésiens d'ensembles finis 718
3 Applications entre ensembles finis 718
4 Parties d'un ensemble fini 720
III Analyse combinatoire 721
1 Choix ordonnés avec répétitions de p objets parmi n 721
2 Choix ordonnés et sans répétitions ou arrangements 722
3 Choix non ordonnés et sans répétition ou combinaisons 722
4 Propriétés des coefficients binomiaux 723

I Ensembles finis, ensembles dénombrables

1 Cardinal des ensembles finis

Intuitivement, un ensemble est dit **fini** s'il possède un *nombre* fini d'éléments. Ce *nombre* est appelé le **cardinal** de l'ensemble. Plus rigoureusement, pour pouvoir *compter* le nombre d'éléments d'un ensemble nous établissons une bijection de cet ensemble vers un *intervalle d'entiers*.

1.a Intervalles d'entiers

Notation : *Soit* $(m,n) \in \mathbf{N}^2$*, tel que* $m \leq n$*. On note* $[\![m,n]\!] = [m,n] \cap \mathbf{N} = \{m, m+1, \dots, n\}$.
En particulier, si $n \in \mathbf{N}^\star$*, convenons de noter* $\mathbb{F}_n = [\![1,n]\!] = \{1,\dots,p\}$ *et* $\mathbb{F}_0 = \emptyset$.

Lemme 28.1.— Soit $(m,n) \in \mathbf{N}^2$.

$$\boxed{\text{Si } \mathbb{F}_m \text{ et } \mathbb{F}_n \text{ sont en bijection, alors } m = n}$$

Démonstration ▽
Soit $n \in \mathbf{N}$. On note $\mathcal{P}(n)$: ≪Pour tout entier $m \in \mathbf{N}$, si $\mathbb{F}_n$ et $\mathbb{F}_m$ sont en bijection, alors $m = n$.≫
On montre par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $\forall n \in \mathbf{N}, \mathcal{P}(n)$.

- **Initialisation :** lorsque $n = 0$. Soit $m \in \mathbf{N}$ tel qu'il existe une bijection $f : \mathbb{F}_0 \to \mathbb{F}_m$. Alors f est en particulier surjective et par conséquent $\mathbb{F}_m = \emptyset$, d'où l'on tire $m = 0$.
- **Hérédité :** soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$. On montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Soit donc $m \in \mathbf{N}$ pour lequel il existe une bijection $f : \mathbb{F}_{n+1} \to \mathbb{F}_m$.
  - ▶ si $f(n+1) = m$, alors f induit une bijection $f_| : [\![1,n]\!] \to [\![1,m-1]\!]$ de $\mathbb{F}_n$ sur $\mathbb{F}_{m-1}$. Par hypothèse de récurrence, il s'ensuit que $n = m-1$, c'est-à-dire $m = n+1$.
  - ▶ si $f(n+1) = a \neq m$, on considère alors la bijection τ de $\mathbb{F}_m$ dans lui-même qui échange a et m, c'est-à-dire que $\tau(a) = m$ et $\tau(m) = a$. Soit alors $g = \tau \circ f : \mathbb{F}_{n+1} \to \mathbb{F}_m$. g est bijective comme composée de bijections et elle vérifie $g(n+1) = \tau(a) = m$. D'après le premier ▶il en résulte que $m = n+1$.
  - ▶ dans tous les cas, on a montré que $m = n+1$.
- **Conclusion :** par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, on a montré que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{P}(n)$. ▲

1.b Ensembles finis

Proposition-Définition 28.2.— Un ensemble E est dit **fini,** s'il existe un entier $n \in \mathbf{N}$ et une application $e : \begin{array}{ccc} F_n & \to & E \\ k & \mapsto & e_k \end{array}$ bijective de $\mathbb{F}_n$ sur E. En ce cas, l'entier n est unique. On l'appelle le **cardinal** de E et on note cette relation

$$\boxed{\mathsf{Card}\ E = n}$$

Commentaires : le cardinal d'un ensemble fini est le nombre d'éléments distincts de cet ensemble.

En pratique : E est un ensemble fini de cardinal n s'il admet n éléments distincts. En ce cas

$$E = \{e_1, \dots, e_n\}, \text{ où } e_1, \dots, e_n \text{ sont des élements 2 à 2 distincts de } E$$

Dans notre approche *imagée*, nous nous contenterons de montrer comment elle permet de découvrir de nouvelles stratégies dans la théorie des ensembles ou des applications.

Proposition 28.3.— Soit E un ensemble fini et F un ensemble. S'il existe une bijection $f : E \to F$, alors F est fini et

$$\boxed{\mathsf{Card}\ F = \mathsf{Card}\ E}$$

Vocabulaire : *lorsqu'il existe une bijection de E sur F, on dit que E et F sont* ***équipotents****. On note cette relation $E \simeq F$.*

Remarque : On déduit du **Théorème** 6.16 que si $E \simeq F$, alors $F \simeq E$. D'autre part, la **Proposition** 6.11, montre que si $E \simeq F$ et $F \simeq G$, alors $E \simeq G$. La relation d'équipotence est une relation d'équivalence.

Démonstration ▽
Soit $n = \mathsf{Card}\ E$. Par définition, $\mathbb{F}_n$ et E sont en bijection, par hypothèse E et F aussi. Par composition,

$$\mathbb{F}_n \xrightarrow{\simeq} E \xrightarrow{\simeq} F$$

il en résulte que $\mathbb{F}_n$ et F le sont aussi, ce qui signifie précisément que F est fini de cardinal n. ▲

Exercice : Soit $(m, n) \in \mathbf{N}^2$ tel que $m \leq n$. Montrez que $[\![m, n]\!]$ est un ensemble fini et calculez son cardinal.

2 Application de la notion de cardinal à l'égalité des ensembles

2.a Résultat préliminaire

Lemme 28.4.— Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbf{N}^\star$, $a \in E$. On a

$$E \setminus \{a\} \text{ est fini et } \mathsf{Card}\ (E \setminus \{a\}) = n - 1$$

Démonstration ▽
c'est évident si l'on s'en tient à l'interprétation intuitive du cardinal !
Soit $f : \mathbb{F}_n \to E$ une bijection. Comme précédemment, on distingue deux cas.

- ▶ si $f(n) = m$, alors f induit une bijection $f_| : [\![1, n-1]\!] \to \mathcal{E} \setminus \{a\}$ de $\mathbb{F}_{n-1}$ sur $E \setminus \{a\}$. Par définition, il s'ensuit que $E \setminus \{a\}$ est fini de cardinal $n - 1$.
- ▶ si $f(a) = m$ avec $a \neq n$, on considère alors la bijection τ de $\mathbb{F}_n$ dans lui-même qui échange a et n, c'est-à-dire que $\tau(a) = m$ et $\tau(m) = a$. Soit alors $g = f \circ \tau : \mathbb{F}_n \to E$. g est bijective comme composée de bijections et elle vérifie $g(n) = f(a) = m$. D'après le premier ▶il en résulte que $E \setminus \{a\}$ est fini de cardinal $n - 1$. ▲

2.b Cardinal des parties

Théorème 28.5.— Cardinal des parties —. Soit E un ensemble **fini** et A une partie de E, alors

- A est un ensemble fini et $\mathsf{Card}\ A \leq \mathsf{Card}\ E$,
- $A = E$ si et seulement si $\mathsf{Card}\ A = \mathsf{Card}\ E$.

Commentaires : ce théorème, complètement trivial du point de vue *intuitif* offre tout de même une nouvelle stratégie pour démontrer l'égalité de deux ensembles E et F. Basiquement, il faut démontrer que $E \subset F$ et $F \subset E$. Grâce au **Théorème** 29.5, nous pouvons aussi démontrer que $E \subset F$ et $\mathsf{Card}\ E = \mathsf{Card}\ F$.

Démonstration ▽
La preuve sera par récurrence sur $n = \mathsf{Card}\ E$.

- **Initialisation** lorsque $n = 0$, alors $E = \emptyset$, donc $A = \emptyset$ et dans ce cas $A = E$ et $\mathsf{Card}\ A = \mathsf{Card}\ E$.
- **Hérédité** soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que pour toute partie A, on a $\mathsf{Card}\ A \leq n$ avec égalité seulement si $A = E$. Soit E_{n+1} un ensemble de cardinal $n + 1$.
  - ▶ Si $A = E$, alors A est fini de cardinal $n + 1$.
  - ▶ Si $A \neq E$, alors il existe $a \in E \setminus A$, autrement dit, $A \subset (E \setminus \{a\})$. Or d'après le **Lemme** , $E \setminus \{a\}$ est fini de cardinal n. L'hypothèse de récurrence s'applique : A est donc fini de cardinal inférieur à $n - 1$. Donc $\mathsf{Card}\ (A) < n + 1$.
  - ▶ par disjonction de cas, on a montré que la propriété est héréditaire.
- **Conclusion** par récurrence sur $\mathsf{Card}\ E$, on a démontré le théorème ≪cardinal des parties≫. ▲

3 Application de la notion de cardinal à l'étude de l'in-/sur-/bi-jectivité

Pour terminer cette brève étude de la notion de cardinal, voyons comment elle permet de développer de nouvelles stratégies pour démontrer qu'une application est injective ou surjective, simplement en calculant le cardinal de certaines parties.

3.a Inversibilité à gauche des injections

Comme préliminaire, établissons le résultat suivant, qu'il convient de rapprocher du théorème de la bijection réciproque (**Théorème** 6.16) :

Proposition 28.6.— Soit E et F des ensembles non vides et $f : E \to F$ une application. Alors

- f est injective *ssi* il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$.
- f est surjective *ssi* il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = id_F$.

Remarque : En particulier, et c'est fondamental, vous voyez qu'il existe une injection de E vers F *si et seulement si* il existe une surjection de F sur E.

Démonstration ▽

- S'il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$, alors, d'après la **Proposition** 6.12, f est injective.
  Réciproquement, supposons f injective, et montrons l'existence d'une fonction $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$.
  Comme il s'agit d'un résultat existentiel, je procède par *analyse-synthèse* :

  Analyse : supposons donc qu'une telle fonction g existe.
  En ce cas, remarquons d'une part que pour tout élement $x \in E$, nous avons $g(f(x) = x$.
  Soit alors $y \in f(E)$. Par construction, y possède un antécédent x par f dans E. Ainsi, $g(y) = g(f(x)) = x$. Comme de plus f est injective $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f.
  Soit $y \notin f(E)$. En ce cas, la propriété $g \circ f = id_E$ n'impose aucune condition sur $g(y)$.

  Synthèse : Soit $a \in E$ fixé. Définissons $g : F \to E$ de la manière suivante.
  Etant donné $y \in F$, on pose $g(y) = a$ si $y \notin f(E)$. Si $y \in f(E)$, en ce cas, y possède un unique antécédent par f (qui est injective). On définit alors $g(y)$ comme l'unique antécédent de y par f.
  On vérifie alors aisément que pour tout élément x de E, $g \circ f(x) = x$.
- Clairement s'il existe $g : F \to E$ telle que $f \circ g = id_F$, alors, d'après la **Proposition** 6.12, f est surjective.
  Réciproquement, supposons f surjective et montrons l'existence d'une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = id_F$.
  Comme il s'agit d'un résultat existentiel, je procède par *analyse-synthèse* :

  Analyse : supposons donc qu'une telle fonction g existe.
  En ce cas, pour tout élement $y \in F$, nous avons $f(g(y)) = y$. Autrement dit $g(y)$ doit être choisi parmi les antécédents de y par f.

  Synthèse : Définissons $g : F \to E$ de la manière suivante.
  Soit $y \in F$. Comme f est surjective, y possède des antécédents par f : notons $A_y = \{x \in E |\ f(x) = y\}$. L'hypothèse de surjectivité entraîne que A_y est une partie non vide de E. Par conséquent nous pouvons *choisir* un élement $g(y) \in A_y$.
  Comme pour tout $y \in F$, $g(y)$ est un antécédent de y par f, nous avons $f \circ g = id_F$. ▲

3.b Application à la surjectivité

Théorème 28.7.— Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble **fini** F.

- L'ensemble *image* $f(E)$ est fini et $\mathsf{Card}\ f(E) \leq \mathsf{Card}\ F$.
- $\mathsf{Card}\ f(E) = \mathsf{Card}\ F$ *si et seulement si* f est surjective.

Commentaires : un diagramme sagittal est particulièrement utile pour comprendre ce **Théorème**. Des indiens tirent sur des cow-boys chaque indiens tire une flèche, et touche exactement un cow-boy :

le nombre de cow-boys tués est inférieur au nombre total de cow-boys avec égalité lorsque tous les cow-boys sont tués !!

Démonstration ▽

- Notons $B = f(E)$ l'ensemble image. Cet ensemble est une partie de F. Il découle donc du **Théorème** 29.5, que B est un ensemble fini et $\mathsf{Card}\ B \leq \mathsf{Card}\ F$.
- Avec les notations ci-dessus : *f est surjective* $\iff B = F \iff \mathsf{Card}\ B = \mathsf{Card}\ F$. ▲

3.c Application à l'injectivité

Théorème 28.8.— Soit f une application d'un ensemble **finie** E vers un ensemble F.

- L'ensemble *image* $f(E)$ est fini et $\mathsf{Card}\ f(E) \leq \mathsf{Card}\ E$.
- $\mathsf{Card}\ f(E) = \mathsf{Card}\ E$ *si et seulement si* f est injective.

Le deuxième résultat est plus difficile à démontrer. Néanmoins, il reste facile à comprendre puisqu'il peut se traduire ainsi :

Le nombre de cow-boys tués est inférieur au nombre de flèches, donc d'indiens ! De plus il y a égalité si les indiens tirent sur des cibles distinctes !

Démonstration ▽
Soit $B = f(E)$. f induit une surjection $f_| : E \to B$. D'après la **Proposition** 29.6, il en résulte l'existence d'une injection $g : B \to E$ telle que $f_| \circ g = id_B$.

- D'après le **Théorème** précédent, $g(B)$ est un ensemble fini et $\mathsf{Card}\ g(B) \leq \mathsf{Card}\ E$.
  Comme B et $g(B)$ sont équipotents, il en résulte que B est finie et vérifie $\mathsf{Card}\ B \leq \mathsf{Card}\ E$.
- Si de plus $\mathsf{Card}\ B = \mathsf{Card}\ E$, en ce cas, le **Théorème** 29.7 permet de conclure que g est surjective. Par suite, g réalise une bijection de B sur E. En ce cas, l'égalité $f_| \circ g = id_B$ montre en particulier que f est injective. ▲

Exercice : Soit E et F des ensembles finis. Démontrez que

1. il existe une injection de E dans F, *si et seulement si* $\mathsf{Card}\ E \leq \mathsf{Card}\ F$.

2. il existe une surjection de E sur F, *si et seulement si* $\mathsf{Card}\ E \geq \mathsf{Card}\ F$.

3. il existe une bijection de E sur F, *si et seulement si* $\mathsf{Card}\ E = \mathsf{Card}\ F$.

Solution ▽

1. *Supposons qu'il existe une injection j de E dans F. j induit une application $j_| : E \to j(E)$ qui est injective –car j l'est– et surjective –par construction. Ainsi, E est en bijection avec $j(E)$. Il en résulte que Card E = Card $j(E)$. Comme de plus $j(E)$ est une partie de F, j'en déduis finalement –grâce à le* **Théorème** *29.5– que Card $E \leq$ Card F.*

Réciproquement, supposons que Card $E \leq$ Card F. En ce cas, F possède une partie B de cardinal Card E. Comme B et E ont même cardinal, il existe une bijection h de E sur B. Notons $i_B : B \hookrightarrow F$ l'injection canonique de B dans F et posons $j = i_B \circ h : E \to F$. Comme j est la composée de deux injections, elle réalise –d'après la **Proposition** *6.11– une injection de E dans F.*

2. *Procédons par équivalences. D'après la première partie*

$$\text{Card } F \leq \text{Card } E \iff \exists\, f : F \to E \text{ injective}$$

Pour conclure, il suffit d'observer que d'après la **Proposition** *29.6*

$$\exists\, f : F \to E \text{ injective} \iff \exists\, g : F \to E \text{ surjective}$$

3.

▲

3.d Application à la bijectivité

On déduit aisément des deux théorèmes précédents :

Théorème 28.9.— Soit E et F deux ensembles **finis** tels que Card E = Card F et $f : E \to F$ une application. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

$\Updownarrow$
- f est injective ;
- f est surjective ;
- f est bijective.

Démonstration ▽
La démonstration sera par équivalences. En effet d'après les deux corollaires précédents

$$\begin{aligned} f \text{ est injective} &\iff \text{Card } f(E) = \text{Card } E \\ &\iff \text{Card } f(E) = \text{Card } F \\ &\iff f \text{ est surjective.} \end{aligned}$$

▲

Remarque : Nous retrouverons des théorèmes analogues au **Théorème** 29.9 en algèbre linéaire, notamment lors de l'étude des applications linéaires en dimension finie.

4 Ensembles dénombrables

4.a Parties finies de N

Exercice : Parties finies de N —. Une partie de **N** est finie *si et seulement si* elle est majorée.

Solution ▽
Supposons que A soit une partie finie de **N**. *Notons n son cardinal et f une application bijective de $\mathbb{F}_n$ sur A. On a*

$$A = \{f(1), \ldots, f(n)\}$$

Il s'ensuit que A est majorée par $M = f(1) + \cdots + f(n)$.
Réciproquement, remarquons que si A est une partie majorée non vide de **N**, *il existe un entier $n \in$ **N** tel que $A \subset [\![0, n]\!]$. Comme $[\![0, n]\!]$ est fini de cardinal $n + 1$, il s'ensuit immédiatement que A est finie de cardinal inférieur à $n + 1$.* ▲

4.b Ensembles dénombrables

Nous avons vu que les ensembles finis sont ceux qui sont en bijection avec les parties majorées de $\mathbf{N}$.

Définition : *Un ensemble E en bijection avec $\mathbf{N}$ tout entier est dit **dénombrable**. Un ensemble E est dit **au plus dénombrable** s'il existe une injection de E dans $\mathbf{N}$, ou, de manière équivalente, s'il existe une surjection de $\mathbf{N}$ sur E.*

Exemple : Toute partie de $\mathbf{N}$ est donc au plus dénombrable. Elle est dénombrable *si et seulement si* elle est non majorée.

Commentaires : en clair, dire que E est au plus dénombrable signifie tout simplement que ses éléments peuvent être rangés dans une suite. On peut donc *numéroter* les éléments de E.

Pour les ensembles dénombrables, la situation est plus compliquée que dans le cas des ensembles finis, mais nous nous limiterons à examiner quelques différences qui apparaissent entre le cas fini et le cas infini : les analogues des **Théorème** 29.5 et **Théorème** 29.9 sont faux pour les ensembles dénombrables :

Exercice :

1. Soit $E = \mathbf{N}$ et $F = \{nombres\ pairs\}$.

- **a.** Montrez que $E \simeq F$, (construisez une bijection de E dans F).
- **b.** Considérez l'injection canonique $i : F \hookrightarrow E$. Est-elle surjective ? !

2.

- **a.** Démontrez en utilisant une récurrence forte que tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$ s'écrit de manière unique sous la forme $n = 2^p(2q+1)$, où $(p,q) \in \mathbf{N}^2$.
- **b.** En déduire que $\mathbf{N} \simeq \mathbf{N}^2$.
- **c.** Considérez la projection $p : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$. Est-elle surjective ? Injective ? !

L'exercice précédent montre en particulier que $\mathbf{N} \simeq \mathbf{N}^2$. On en déduit facilement que $\mathbf{N} \simeq \mathbf{Q}$. Mais où cela s'arrêtera-t-il ? On pourrait penser qu'il n'y a que deux types d'ensembles, les ensembles finis et les ensembles dénombrables. Cette vision des choses a été mise en défaut par le mathématicien allemand Georg Cantor à la fin du XIX$^{\text{ième}}$ siècle lorsqu'il a démontré -entre autres- que **$\mathbf{R}$ n'est pas** en bijection avec $\mathbf{N}$.
Petit dérapage : dsl ;-(

II Dénombrement

Dans cette partie du chapitre, nous cherchons à calculer le cardinal d'ensembles finis. Nous présentons les *modèles théoriques à connaître*, ainsi que les *principes de base* du dénombrement.

Notation : *Si $n \in \mathbf{N}^\star$, on appelle factorielle de n, et on note $n!$ le produit $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ et on convient que $0! = 1$.*

1 Réunions d'ensembles

On simplifie souvent un problème de dénombrement grâce à une *discussion exclusive* de cas. Lorsque l'ensemble à dénombrer s'écrit comme une réunion d'ensembles *deux à deux disjoints*, vous utilisez le **Corollaire** 29.11 ci-dessous :

1.a Réunion disjointe

Proposition 28.10.— Cardinal d'une réunion disjointe —. Soit E et F des ensembles finis et disjoints ($E \cap F = \emptyset$). Alors $E \cup F$ est fini et

$$\boxed{\mathsf{Card}\ (E \cup F) = \mathsf{Card}\ E + \mathsf{Card}\ F}$$

Vocabulaire : *on dit que le cardinal est additif.*

Démonstration ▽
Soit $n = \mathsf{Card}\ E$ et $p = \mathsf{Card}\ F$. Notons f_E (resp. f_F) une bijection de E sur $[\![1, n]\!]$ (resp. de F sur $[\![1, p]\!]$). On construit une bijection de $E \cup F$ sur $[\![1, n+p]\!]$ de la manière suivante : tout d'abord en utilisant une translation on construit une bijection de $[\![1, p]\!]$ sur $[\![n+1, n+p]\!]$. En composant avec f_F, on obtient une bijection de F sur $[\![n+1, n+p]\!]$. Appelons-la $\tilde{f}_F$. Définissons alors $f : E \cup F \to [\![1, n+p]\!]$ par

$$f(x) = \begin{cases} f_E(x) & \text{si } x \in E \\ \tilde{f}_F(x) & \text{si } x \in F \end{cases}.$$

f définit bien une application car $E \cap F = \emptyset$. De plus f est bijective car ses restrictions à E et F le sont et que $f(E) \cap f(F) = \emptyset$. ▲

Cette proposition est la base de toutes les techniques de dénombrement. Elle se généralise au cas de la réunion d'une famille finie d'ensembles deux à deux disjoints de la façon suivante :

Corollaire 28.11.— Soit $(E_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille finie d'ensembles deux à deux disjoints. Alors $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ est un ensemble fini et :

$$\boxed{\mathsf{Card}\ \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{Card}\ E_i}$$

Vocabulaire : *Si les E_i sont des ensembles deux à deux disjoints tels que $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, on dit que la famille $\{E_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ est une* ***partition*** *de E.*

En pratique : ce corollaire est d'usage constant en dénombrement : pour dénombrer E vous pouvez regrouper les éléments de E en paquets disjoints, les cardinaux s'ajoutent.
Vous présentez le calcul sous la forme d'une discussion exclusive de cas.

Exercice : On tire 5 cartes d'un jeu de 32. Combien y a-t-il de mains avec au moins 3 rois ?

Solution ▽
Pour dénombrer les mains contenant au moins trois rois, je distingue deux cas

- *soit la main contient exactement trois rois.*
- *soit la main contient exactement quatre rois.* ▲

1.b Complémentaire et différence

Corollaire 28.12.— Soit A, B des parties d'un ensemble fini E. Alors

- $\mathsf{Card}\ (E \setminus A) = \mathsf{Card}\ E - \mathsf{Card}\ A$
- $\mathsf{Card}\ (B \setminus A) = \mathsf{Card}\ B - \mathsf{Card}\ (A \cap B)$.

Démonstration ▽
Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Notons pour alléger $\bar{A} = \complement_E A$. D'après la caractérisation du complémentaire $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$. D'après la **Proposition** 29.10, il en résulte que $\mathsf{Card}\ A + \mathsf{Card}\ \bar{A} = \mathsf{Card}\ E$. D'où je tire

$$\mathsf{Card}\ (E \setminus A) = \mathsf{Card}\ E - \mathsf{Card}\ A$$

Pour la deuxième assertion, il suffit de remarquer que $B \setminus A$ est le complémentaire dans B de $A \cap B$ et d'appliquer l'égalité ci-dessus. ▲

Exercice : On tire 5 cartes d'un jeu de 32. Combien y a-t-il de tirages avec au moins 1 roi ?

1.c Réunion quelconque

Proposition 28.13.— Soit E et F des ensembles finis. Alors $E \cup F$ est fini et

$$\boxed{\mathsf{Card}\ (E \cup F) = \mathsf{Card}\ E + \mathsf{Card}\ F - \mathsf{Card}\ (E \cap F)}$$

Démonstration ▽
$E \cup F = E \cup (F \setminus E)$. D'après les **Propositions** 29.10 et 29.12,
$\mathsf{Card}\ (E \cup F) = \mathsf{Card}\ E + \mathsf{Card}\ (F \setminus E) = \mathsf{Card}\ E + \mathsf{Card}\ F - \mathsf{Card}\ (E \cap F)$. ▲

Remarques :

- La conclusion de la **Proposition** 29.13 peut aussi s'énoncer de la manière suivante :

$$\mathsf{Card}\ (E \cup F) + \mathsf{Card}\ (E \cap F) = \mathsf{Card}\ E + \mathsf{Card}\ F.$$

- lorsque $E \cap F = \emptyset$, nous retrouvons l'additivité du cardinal.

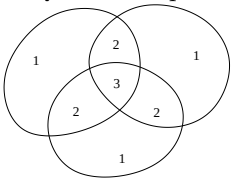
Cette formule se généralise à la réunion d'une famille finie d'ensembles :

Proposition 28.14.— Formule du crible ou formule de Poincaré —. Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille finie de parties d'un ensemble E, alors

$$\boxed{\mathsf{Card}\ \Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathsf{Card}\ \big(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\big)}$$

Nb : la formule du crible est *hors-programme*

Exemple : Lorsque $n = 3$, la formule de **Poincaré** s'écrit :



$$\begin{aligned}\mathsf{Card}\ \big(A_1 \cup A_2 \cup A_3\big) &= \mathsf{Card}\ A_1 + \mathsf{Card}\ A_2 + \mathsf{Card}\ A_3\\ -\mathsf{Card}\ \big(A_1 \cap A_2\big) - \mathsf{Card}\ \big(A_1 \cap A_3\big) &- \mathsf{Card}\ \big(A_2 \cap A_3\big)\\ +\mathsf{Card}\ \big(A_1 \cap A_2 \cap A_3\big).&\end{aligned}$$

1.d Théorème des Bergers

Le **Principe des Bergers** est tout à fait incontournable et peut se résumer ainsi : pour calculer le nombre de pattes de son troupeau le berger multiplie le nombre de brebis par 4...
brillant !

Théorème 28.15.— Théorème des bergers —. Soit E, F des ensembles finis et $f : E \to F$ une application surjective de E sur F. On suppose que $(\exists p \in \mathbf{N}^\star)\ (\forall y \in F)$, $\mathsf{Card}\ \big(\bar{f}^{1}(\{y\})\big) = p$. Alors

$$\boxed{\mathsf{Card}\ E = p \times \mathsf{Card}\ F}$$

En pratique : le théorème précédent s'applique de deux manières différentes :

- ▸ vous souhaitez dénombrer E et vous savez regrouper ses éléments en paquets de p,
- ▸ vous souhaitez dénombrer F, et vous savez qu'à chacun de ses élément correspondent p éléments de E.

Exemples :

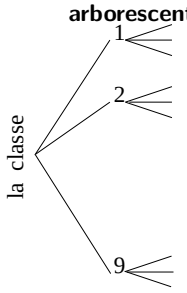
1. Une classe compte 9 groupes de colles de 3 étudiants, il y a donc 3×9 étudiants.

2. Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n points sur le cercle unité. Combien de droites **différentes** (A_i, A_j) définissent-ils ?

Démonstration ▽
Soit $y \in F$, notons $E_y = \bar{f}^{1}(\{y\})$. Comme f est une application E peut s'écrire comme la réunion disjointe $E = \bigsqcup_{y\in F} E_y$.
Appliquons alors le corollaire précédent, il vient : $\mathsf{Card}\ E = \sum_{y\in F} \mathsf{Card}\ E_y = \sum_{y\in F} p = p\ \mathsf{Card}\ F$. ▲

Le principe des Bergers pourra être présenté de deux façons. Reprenons l'exemple ci-dessus.

Présentation arborescente



Présentation des étapes successives

Pour dénombrer la classe, on peut procéder ainsi :

- je choisis d'abord un groupe de colle ⇝ 9 possibilités.
- puis je choisis un étudiant dans ce groupe ⇝ 3 possibilités.

Au total, il y a donc 27 élèves.

Cette présentation est particulièrement pratique lorsqu'il y a un nombre important d'étapes.

2 Produits cartésiens d'ensembles finis

Proposition 28.16.— Cardinal d'un produit —. Soit E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et :

$$\boxed{\mathsf{Card}\ (E \times F) = \mathsf{Card}\ E \times \mathsf{Card}\ F}$$

Démonstration ▽
Pour dénombrer $E \times F$, j'utilise le principe du berger. Je décris les étapes qui mènent à la réalisation d'un élément de $E \times F$.

- je choisis $x \in E$ ⇝ $\mathsf{Card}\ E$ possibilités.
- je choisis $y \in F$ ⇝ $\mathsf{Card}\ F$ possibilités.

Au total, il y a $\mathsf{Card}\ E \times \mathsf{Card}\ F$ éléments distincts dans $E \times F$. ▲

Cette proposition s'étend bien sûr aux produits cartésiens de n ensembles :

Corollaire 28.17.— Soit $(F_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille finie d'ensembles finis. Le produit cartésien $\prod_{i=1}^{p} F_i = F_1 \times \cdots \times F_p$ est fini et

$$\boxed{\mathsf{Card}\ \left(\prod_{i=1}^{p} F_i\right) = \prod_{i=1}^{p} \mathsf{Card}\ F_i}$$

En particulier $\mathsf{Card}\ (F^n) = (\mathsf{Card}\ F)^n$.

Exercice : Combien y a-t-il de numéros de téléphone commençant par 02 96 ?

Solution ▽
Un numéro de téléphone commençant par 02 96 est une suite de 6 chiffres entre 0 et 9. L'ensemble de ces numéros de téléphone est donc en bijection avec le produit cartésien $[\![0, 9]\!]^6$. *Il y a donc* 10^6 *numéros différents commençant par 02 96.* ▲

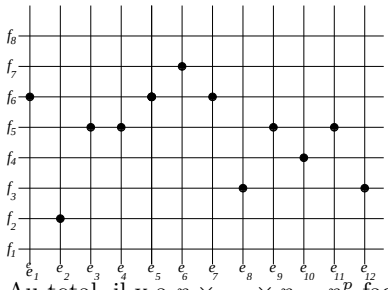
3 Applications entre ensembles finis

3.a Nombre total d'applications

Proposition 28.18.— Nombre total d'applications —. Soit E_p et F_n deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n. Alors l'ensemble $F^E = \mathscr{F}(E_p, F_n)$ des applications de E_p vers F_n est fini et :

$$\boxed{\mathsf{Card}\ (F^E) = (\mathsf{Card}\ F_n)^{\mathsf{Card}\ E_p} = n^p}$$

Démonstration ▽
Pour dénombrer l'ensemble des applications de E vers F, je décris les étapes de la construction d'une telle application :



- je choisis l'image de e_1 $\rightsquigarrow n$ possibilités.
- je choisis l'image de e_2 $\rightsquigarrow n$ possibilités.

$\vdots$

- je choisis l'image de e_p $\rightsquigarrow n$ possibilités.

Au total, il y a $\underbrace{n \times \cdots \times n}_{p \text{ fois}} = n^p$ façons différentes de construire une application de E dans F. ▲

3.b Nombre d'applications injectives

Soit E_p et F_n deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n. Pour qu'il existe une application injective de de E_p dans F_n, il est nécessaire que p soit inférieur à n. Plus précisément,

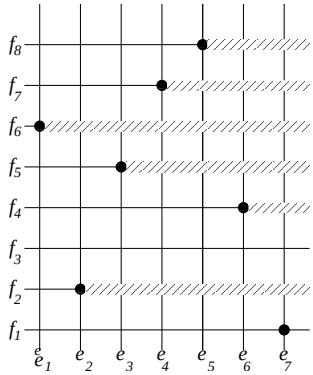
Proposition 28.19.— Nombre d'applications injectives —. Soit E_p et F_n deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n. Le nombre d'**applications injectives** de E_p dans F_n est :

- $\dfrac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$ si $p \leq n$
- 0 si $p > n$

Démonstration ▽
Supposons sans perte que $p \in [\![0, n]\!]$.

Pour construire une injection f de E_p dans F_n, je procède par étapes :
• je choisis tout d'abord l'image $f(e_1)$ de e_1 par f parmi les n éléments de F_n,
Il y a donc $\rightsquigarrow n$ possibilités.

Pour garantir que l'application f construite soit injective, $f(e_1)$ ne devra plus être choisie dans les étapes suivantes. Je raye cette valeur des choix possibles comme indiqué sur le dessin ci-contre.



• je choisis $f(e_2)$ parmi les $n-1$ éléments restants dans F $\rightsquigarrow (n-1)$ possibilités.

Cet élément $f(e_1)$ ne devra plus être choisi dans les étapes suivantes, je raye donc cette valeur des choix possibles.
• je choisis ensuite $f(e_3)$ parmi les $n-2$ éléments restants dans F $\rightsquigarrow (n-2)$ possibilités.

Ainsi de suite, je perds une possibilité à chaque étape. Après $p-1$ étapes successives, j'ai donc perdu $p-1$ possibilités. A la fin :

• je choisis $f(e_p)$ parmi les $n-p+1$ éléments restants $\rightsquigarrow (n-p+1)$ possibilités.

Au total, il y a donc $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ façons différentes de construire une application injective de E_p dans F_n. ▲

3.c Nombre d'applications bijectives

Étant donnés deux ensembles E_p et F_n de cardinaux respectifs p et n, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une bijection de E sur F est que $n = p$. En ce cas, nous savons d'après le **Théorème** 29.9 qu'une application $f : E_n \to F_n$ est bijective *si et seulement si* elle est injective. On déduit donc de la **Proposition** 29.19 le

Corollaire 28.20.— Nombre d'applications bijectives —. Soit E_p et F_n deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n. Le nombre d'**applications bijectives** de E_p dans F_n est :

$$\begin{array}{|ll|}\hline \bullet & 0 \quad \text{si } p \neq n \\ \bullet & n! \quad \text{si } p = n \\ \hline \end{array}$$

Vocabulaire : *Une application bijective de E_n dans lui-même est appelée une* ***permutation****.*

4 Parties d'un ensemble fini

4.a Nombre total de parties

Proposition 28.21.— Nombre de parties —. Soit E_n un ensemble à n éléments. Alors

$$\boxed{\mathsf{Card}\ \left(\mathscr{P}(E)\right) = 2^n.}$$

Démonstration ▽
Soit $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ un ensemble de cardinal n. Pour dénombrer l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E, je décris les étapes conduisant à la construction d'une partie A de E :

- je choisis si l'élément e_1 appartient ou non à A $\rightsquigarrow$ 2 possibilités,
- je choisis si l'élément e_2 appartient ou non à A $\rightsquigarrow$ 2 possibilités,

$\vdots$

- je choisis si l'élément e_n appartient ou non à A $\rightsquigarrow$ 2 possibilités,

Au total, il y a $\underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ fois}} = 2^n$ façons de construire une partie de E. Donc $\mathscr{P}(E)$ est fini de cardinal 2^n. ▲

Exercice : Soit E un ensemble de 10 nombres entiers compris entre 1 et 100. Démontrez qu'il existe deux sous-ensembles de E non vides et disjoints ayant la même somme.

Solution ▽
Soit $\sigma : \mathscr{P}(E)\backslash\{\emptyset\} \to [\![1, 1000]\!]$ qui à toute partie A de E associe $\sigma(A) = \sum_{a\in A} a$. Alors j'affirme que σ n'est pas injective. En effet si tel était le cas, alors nécessairement Card $\left(\mathscr{P}(E)\right) - 1 \leq 1000$. Or ceci est faux puisque Card $\left(\mathscr{P}(E)\right) = 2^{10} = 1024$. Ainsi il existe deux sous ensembles non vides distincts qui ont même somme. En retranchant alors à ces deux ensembles leur intersection, on obtient deux sous-ensembles disjoints et non vides qui ont même somme.☺ ▲

4.b Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments

Soit E_n un ensemble fini de cardinal n. Pour qu'il existe une partie de E à p éléments, il est nécessaire que $p \in [\![0, n]\!]$. En ce cas, notons $\mathscr{P}_p(E_n)$ l'ensemble des parties de E_n à p éléments.

Proposition 28.22.— Nombre de parties à p éléments —. Soit E_n un ensemble à n éléments et $p \in \mathbf{N}$. Le nombre de parties à p éléments de E_n est :

$$\begin{array}{|ll|}\hline \bullet & \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} \quad \text{si } p \leq n \\ \bullet & 0 \quad \text{si } p > n \\ \hline \end{array}$$

Notation : *vous reconnaissez l'expression des coefficients du binôme $\binom{n}{p}$. Ainsi :*

$$\mathsf{Card}\ \left(\mathscr{P}_p(E_n) = \binom{n}{p}\right.$$

Démonstration ▽
Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^2$. D'après le **Théorème** 29.5, toute partie A de E_n est de cardinal inférieur ou égal à n. Supposons donc que $p \leq n$ et convenons de noter $\mathscr{P}_p(E_n)$ l'ensemble des parties de E_n à p éléments. Une partie $A \in \mathscr{P}_p(E_n)$ s'écrit $\{a_1, \dots, a_p\}$. En vue d'appliquer le principe des Bergers, considérons l'application *image-directe* Γ, qui à une application injective f associe l'ensemble de ses images :

$$\begin{array}{rccc} \Gamma : & \{f : [\![1,p]\!] \to E_n \mid f \text{ injective}\} & \to & \mathscr{P}_p(E_n) \\ & f & \mapsto & f([\![1,p]\!]) \end{array}$$

D'après le cas d'égalité de la **Proposition** 29.8, Γ est bien définie car l'image par une application injective d'un ensemble à p éléments est un ensemble à p éléments.
De plus Γ est surjective. En effet si $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ est une partie de E à p éléments, l'application $f : [\![1,p]\!] \to E_n$ définie pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, par $f(k) = a_k$ est une application injective de $[\![1,p]\!]$ dans E_n telle que $\Gamma(f) = A$.
Afin de préciser l'ensemble des antécédents de A par Γ, remarquons enfin que si f est une injection de $[\![1,p]\!]$ dans E_n qui a pour image directe A, cela signifie que f induit une bijection de $[\![1,p]\!]$ sur A. Inversement, il est clair que toute bijection de $[\![1,p]\!]$ sur A a pour ensemble image A. Ainsi, les antécédents de A pour Γ sont les bijections de $[\![1,p]\!]$ sur A. D'après la **Proposition** 29.20, A possède donc $p!$ antécédents.
Le principe des Bergers permet finalement d'en déduire que le nombre de parties de E_n à p éléments est $\dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$. ▲

III Analyse combinatoire

Choix de p objets parmi n

Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^2$ deux entiers. Un ensemble E_n contient n objets. On choisit suivant un protocole à préciser, p objets parmi ceux-là. L'objectif de ce paragraphe est de discuter suivant les différents protocoles le nombre de choix possibles de p objets parmi n.

1 Choix ordonnés avec répétitions de p objets parmi n

Protocole

> *On choisit l'un après l'autre p éléments de E_n avec la possibilité de choisir plusieurs fois le même élément*

Un choix ordonné avec répétitions, de p objets parmi n peut donc être modélisé comme une p-liste d'objets :

Définition : *Soit E un ensemble et $p \in \mathbf{N}$. On appelle*[1]*, **p-liste d'éléments de** E toute famille d'éléments de E indexée par $\mathbb{F}_p$.*
Une p-liste d'éléments de E est donc une application $e : [\![1,p]\!] \to E$. On la note $(e_1, \dots, e_p)$.

Notation : *On note E^p l'ensemble des p-listes d'éléments de E.*

Proposition 28.23.— Soit E_n un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbf{N}^\star$ et $p \in [\![1,n]\!]$.

Le nombre de p-listes d'éléments de E est n^p.

En pratique : vous utilisez les p-listes pour les tirages successifs avec remise et les choix ordonnés avec répétitions.

Démonstration ▽
L'ensemble des p-listes d'éléments de E est $E^{[\![1,p]\!]}$. Son cardinal est donc $(\mathsf{Card}\ E)^{\mathsf{Card}\ \mathbb{F}_p} = n^p$. ▲

Exercice : Combien de nombres à 4 chiffres peut-on former avec les six chiffres 1,2,3,4,5,6 ?

1. on dit aussi ***p*-uplet d'éléments de** E

2 Choix ordonnés et sans répétitions ou arrangements

Protocole

On choisit l'un après l'autre p éléments distincts de E_n.

Par conséquent, un tel choix est une p-liste d'éléments *deux à deux* distincts de E_n.

Définition : *Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^2$. On appelle **arrangement de p éléments de** E_n toute p-liste d'éléments distincts de E_n. On la note $(e_1, \dots, e_p)$.*

Notation : *$\mathcal{A}(p,n)$ désigne l'ensemble des arrangements de p éléments parmi n. Le nombre d'arrangements de p éléments dans E_n est noté A_n^p.*

Il n'existe pas toujours d'arrangements de p éléments d'un ensemble E de cardinal n. Plus généralement, nous avons d'après la **Proposition** 29.19 :

Théorème 28.24.— Arrangements de p objets parmi n —. Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^2$ un couple d'entiers naturels et E_n un ensemble fini à $n \in \mathbf{N}$ éléments. Le nombre d'arrangements de p éléments de E_n est donné par la formule :

- $\mathsf{A}_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$ si $p \leq n$
- $\mathsf{A}_n^p = 0$ si $p > n$

Démonstration ▽
Il suffit d'appliquer la **Proposition** 29.19. ▲—c——c—c—

En pratique : vous utilisez les arrangements dans tous les problèmes de tirages successifs et sans remise ainsi que pour modéliser les **choix ordonnés** de p éléments parmi n, **sans répétition**.

Exercice : Combien y a-t-il de tiercés différents pour dix chevaux au départ ?

Solution ▽
Un tiercé est une liste sans répétition de trois chevaux parmi 10, je peux le modéliser par un 3-arrangement de $[\![1,10]\!]$. Par conséquent, le nombre de tiercés est $\mathsf{A}_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$. ▲

Lorsque $p = n$, le **Théorème** 29.9 prouve que toute injection de $\mathbb{F}_n$ dans E_n est en réalité bijective. On en déduit :

Théorème 28.25.— Permutations —. Soit E_n un ensemble à n éléments.

Le nombre de bijections de E_n dans lui-même (on dit aussi **permutations**) est $n!$.

3 Choix non ordonnés et sans répétition ou combinaisons

Protocole :

On choisit simultanément p objets distincts de E_n.

Ceci revient à choisir une partie de E_n à p éléments.

Définition : *Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^2$. On appelle **combinaison** de p éléments de E_n toute partie de E_n de cardinal p.*

Théorème 28.26.— Combinaisons de p objets parmi n—. Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^2$ et E_n un ensemble fini à n éléments. Le nombre de combinaisons de p éléments de E_n est donné par la formule :

- $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} = \dfrac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$ si $p \leq n$
- $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$

Démonstration ▽
Il s'agit de la **Proposition** 29.22. ▲

En pratique : vous utilisez les combinaisons pour modéliser les tirages simultanés de p éléments parmi n ainsi que pour les **choix** de p éléments parmi n, **sans** considération d'**ordre** et **sans répétition**.

Exercice : On tire une *main* de cinq cartes dans un jeu de 32. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

Solution ▽
Une main est une partie à 5 éléments du jeu de cartes. Par conséquent, le nombre de mains différentes est le nombre de combinaison de 5 parmi 32 : $\binom{32}{5} = 201376$. ▲

3.a Mise en œuvre

On choisit p objets parmi n. Pour décider quel modèle utiliser, vous vous posez deux questions

1 le choix est-il ordonné ou pas, est-ce que l'ordre des objets compte ?

2 peut-il y avoir des répétitions ? peut-on choisir plusieurs fois le même objet ?

Vous vous reportez alors au tableau suivant :

choix de p objets parmi n	ordonné	non ordonné
avec répétition	n^p	? ?
sans répétition	A_n^p	$\binom{n}{p}$

Exercice : Combien existe-t-il de suites (a_1, a_2, a_3, a_4) de nombres entiers telles que

$$1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \leq 7$$

Solution ▽
Notons $E = [\![1,7]\!]$ et A l'ensemble des 4-listes strictement croissantes d'éléments de E. Considérons l'application Φ qui à toute suite $(a_1,a_2,a_3,a_4) \in A$ associe la partie $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$. Comme les suites appartenant à A sont strictement croissantes, elles sont en particulier sans répétition. Par conséquent, Φ définit une application de A vers $\mathcal{C}(4,7)$:

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & A & \to & \mathscr{P}_4(E) \\ & (a_1,a_2,a_3,a_4) & \mapsto & \{a_1,a_2,a_3,a_4\} \end{array}$$

De plus, étant donnée une partie $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, il n'y a qu'une seule manière de ranger ces éléments dans l'ordre croissant. Autrement dit, il existe une et une seule suite antécédent de $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ par Φ.
D'après le **principe des Bergers** [2]*, il en résulte que Card* $A = \binom{7}{4} = 35$. ▲

4 Propriétés des coefficients binomiaux

Nous avons déjà établi les principales propriétés des coefficients du binôme. Le but de ce paragraphe est de rappeler ces résultats et de voir comment on peut à présent les interpréter à l'aide d'un raisonnement de dénombrement.

2. ou le point de vue équation pour la question de la bijectivité de Φ

4.a Propriétés fondamentales des coefficients binomiaux

Proposition 28.27.— Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^2$.

- $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ et $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$
- $\binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1}\binom{n}{p}$

Démonstration ▽

- La partie vide est la seule partie de E_n qui ne possède aucun élément. Les parties de E_n formées d'un seul élément sont les n singletons de E_n.
- Il suffit de remarquer que l'application $\Phi : \mathscr{P}_p(E_n) \to \mathscr{P}_{n-p}(E_n)$ qui à toute partie $A \in \mathscr{P}_p(E_n)$ à p éléments de E_n associe son complémentaire dans E_n est bijective.
- La preuve est astucieuse ! Nous allons compter les parties de $\mathbb{F}_{n+1}$ à $p+1$ éléments en distinguant suivant que ces parties contiennent ou non $n+1$. $\mathscr{P}_{p+1}(\mathbb{F}_{n+1})$ s'écrit comme la réunion **disjointe** :

$$\mathscr{P}_{p+1}(\mathbb{F}_{n+1}) = \{A \in \mathscr{P}_{p+1}(\mathbb{F}_{n+1}) \mid n+1 \in A\} \sqcup \{B \in \mathscr{P}_{p+1}(\mathbb{F}_{n+1}) \mid n+1 \notin B\}.$$

Or $\{A \in \mathscr{P}_{p+1}(\mathbb{F}_{n+1}) |\ n+1 \in A\}$ est clairement en bijection avec l'ensemble des parties à p éléments de $\mathbb{F}_n$. D'où $\mathsf{Card}\ (\{A \in \mathscr{P}_{p+1}(\mathbb{F}_{n+1}) |\ n+1 \in A\}) = \binom{n}{p}$. D'autre part $\{B \in \mathscr{P}_{p+1}(\mathbb{F}_{n+1}) |\ n+1 \notin B\}$ est en bijection avec l'ensemble des parties à $p+1$ éléments de $\mathbb{F}_n$, d'où $\mathsf{Card}\ (\{B \in \mathscr{P}_{p+1}(\mathbb{F}_{n+1}) |\ n+1 \notin B\}) = \binom{n}{p+1}$. Le résultat découle alors de la **Proposition** 29.10.

4.b Formule du binôme de Newton

Nous avons déjà démontré pour tout $(a,b) \in \mathbf{C}^2$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, la formule $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

On démontre ici le

Corollaire 28.28.— Pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$$

Démonstration ▽

Soit E_n un ensemble fini de cardinal n, de sorte que 2^n est le nombre total de parties de E. Nous pouvons aussi calculer le nombre de parties A de E en discutant suivant le cardinal k de A.

Soit $k \in [\![0,n]\!]$, il y a $\binom{n}{k}$ parties à k éléments de E. Par additivité du cardinal, il s'ensuit que $\mathsf{Card}\ \mathscr{P}(E) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. ▲

4.c Formule de Van Der Monde

Pour conclure ce chapitre, démontrons à titre d'exemple, la

Proposition 28.29.— Formule de Van der Monde —. Soit n, n_1, n_2 des entiers naturels, alors

$$\boxed{\binom{n_1+n_2}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}}$$

Démonstration ▽
Pour démontrer cette formule, j'utilise un raisonnement de dénombrement. Introduisons deux ensembles disjoints E_1 et E_2 tels que $\mathsf{Card}\ E_1 = n_1$, $\mathsf{Card}\ E_2 = n_2$. Posons $E = E_1 \cup E_2$. Comme par construction E_1 et E_2 sont disjoints, la **Proposition** 29.10 montre que $\mathsf{Card}\ E = n_1 + n_2$.

Ceci étant, $\binom{n_1+n_2}{n}$ représente le nombre de parties A de E ayant exactement n éléments. On peut retrouver ce nombre en discutant suivant le cardinal k de $A \cap E_1$:

Comme $A \cap E_1$ est une partie de E_1, k varie entre 0 et n_1. Soit donc $k \in [\![0, n_1]\!]$ fixé. Pour dénombrer les parties à n éléments de E, dont k sont dans E_1, je décris les étapes qui mènent à la construction d'une telle partie :

- je choisis k éléments dans E_1 $\rightsquigarrow \binom{n_1}{k}$ possibilités
- je choisis $n-k$ éléments dans E_2 $\rightsquigarrow \binom{n_2}{n-k}$ possibilités

Ainsi, il y a $\binom{k}{n_1} \times \binom{n-k}{n_2}$ parties de E ayant n éléments parmi lesquels k exactement sont dans E_1.

Finalement, en discutant suivant les valeurs possibles de k, j'obtiens :

$$\binom{n_1+n_2}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}$$

▲