TECHNIQUES & MÉTHODES S23

NB : cette fiche reprend les techniques nécessaires **minimales**; elle ne constitue donc pas un objectif, mais un prérequis!

APPLICATIONS LINÉAIRES

▪▪▪ Reconnaître une application linéaire

- je connais déjà des exemples célèbres d'applications linéaires : applications linéaires de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$ canoniquement associées à une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, dérivation des polynômes dans $\mathbf{K}[X]$, etc...
- de plus l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires est un espace vectoriel, de sorte que toute C-L d'applications linéaires est aussi une application linéaire.

Mais en règle générale, je montre que f préserve les combinaisons linéaires :
$\boxed{1}$ soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$.
$\boxed{2}$ je montre que

$$f(\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y}) = \lambda \cdot f(\vec{x}) + \mu \cdot f(\vec{y})$$

C'est la méthode la plus courante. Elle est souvent très simple à mettre en œuvre.

▪▪▪ Image et noyau d'une application linéaire

Comment déterminer le noyau d'une application linéaire

Pour déterminer le noyau d'une application linéaire, je me rappelle qu'un vecteur $\vec{x} \in E$ appartient à $\mathsf{Ker}\, f$ *si et seulement si* $\vec{x}$ est solution de l'*équation vectorielle* :

$$f(\vec{x}) = \vec{0}_F$$

$\boxed{1}$ je traduis cette équation en coordonnées;
$\boxed{2}$ j'obtiens souvent un *système d'équations linéaires* homogène que je résous grâce à l'algorithme de Gauss;
$\boxed{3}$ en collectant suivant les variables libres, j'obtiens aussi une famille génératrice de $\mathsf{Ker}\, f$.
$\boxed{4}$ je vérifie que cette famille génératrice est une base de $\mathsf{Ker}\, f$.

Comment déterminer l'image d'une application linéaire

Pour déterminer l'image d'une application linéaire, je me rappelle que $\mathsf{Im}\, f$ **est engendrée par les images d'une base** $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ de E.
En particulier, si $f : \mathbf{K}^p \to \mathbf{K}^n$ est canoniquement associée à une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $\mathsf{Im}\, f$ est engendrée par les vecteurs (de $\mathbf{K}^n$) canoniquement associés aux colonnes de A.

Sinon on peut aussi revenir à la définition : un vecteur $\vec{y} \in F$ est élément de l'image de f *si et seulement si il existe* $\vec{x} \in E$ solution de l'*équation vectorielle* :

$$f(\vec{x}) = \vec{y}$$

$\boxed{1}$ je traduis cette équation en coordonnées
$\boxed{2}$ j'obtiens souvent un *système d'équations linéaires* que j'échelonne par la méthode de Gauss.
$\boxed{3}$ le vecteur $\vec{y}$ est dans l'image si le système obtenu est **compatible**. C'est le cas lorsque toutes les équations auxiliaires sont vérifiées!

Exercice 40 : Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$. On définit $u : E \to \mathbf{R}[X]$ par :

$$\forall P \in E, \quad u(P)(X) = -nX\, P(X) + X^2\, P'(X)$$

1. Vérifiez que u est un endomorphisme de E. 2. Déterminez-en image et noyau. *réponse :* 1. u est linéaire : soit $(P, Q) \in E^2, (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$. On a $u(\lambda P + \mu Q) = -nX\,(\lambda P + \mu Q)(X) + X^2\,(\lambda P + \mu Q)'(X) = \lambda(-nX\,P(X) + X^2\,P'(X)) + \mu(-nX\,Q(X) + X^2\,Q'(X)) = \lambda u(P) + \mu u(Q)$. Ceci étant vrai pour tout $(P, Q) \in E^2, (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, on a bien montré que u est linéaire. 2. Vérifions que u est un endomorphisme de E. Vu la question suivante, je calcule l'image. Je sais que $\mathsf{Im}\, u = \mathsf{Vect}\,(u(X^k), 1 \leq k \leq n)$. Or $u(1) = -nX$, $u(X^k) = -nX^{k+1} + kX^{k+1} = (k-n)X^{k+1}$, $u(X^n) = 0$. Finalement, $\mathsf{Im}\, u = \mathsf{Vect}\,\{X, X^2, \ldots, X^n\}$. En particulier, $\mathsf{Im}\,(u) \subset E$, u est bien un endomorphisme de E. 3. Reste à déterminer le noyau. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On a $P \in \mathsf{Ker}\, u \iff u(P) = 0 \iff \sum_{k=0}^{n} a_k (k-n) X^{k+1} = 0$ Cette équation polynomiale se traduit par (identification des coeff) : $P \in \mathsf{Ker}\, u \iff a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ Par conséquent, $\mathsf{Ker}\, u = \mathsf{Vect}\,(X^n)$.

Comment démontrer qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel

Aux méthodes vues au chapitre précédent, viennent s'ajouter deux nouvelles tactiques utilisant le noyau et l'image d'une application linéaire :

Soit E, F des espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F.

- **Point de vue équations**
  Si $A \subset E$ est défini par une équation linéaire **homogène** $A = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \vec{0}_F\}$, alors $A = \mathsf{Ker}\, f$ est un sous-espace vectoriel de E.

- **Point de vue paramètrage**
  Si $A \subset F$ est défini par un paramétrage linéaire $A = \{f(\vec{x})\,;\ \vec{x} \in E\} = \{\vec{y} \in F \mid \exists \vec{x} \in E;\ \vec{y} = f(\vec{x})\}$, alors $A = \operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

▪▪▪ Applications linéaires surjective, injective, bijective

Comment démontrer qu'une application linéaire est surjective

- J'utilise la caractérisation par l'image : je démontre que $\operatorname{Im} f = F$
  Il s'agit d'une égalité ensembliste entre sous-espaces vectoriels, je peux procéder par double-inclusion ($F \subset \operatorname{Im} f$ suffit puisque l'autre inclusion est évidente !)
- j'utilise la caractérisation par les bases : si $\mathcal{B}$ est une base de E, il s'agit de prouver que $f(\mathcal{B})$ engendre F.

▪▪▪ Comment démontrer qu'une application linéaire est injective

- J'utilise la caractérisation par le noyau, il s'agit de prouver que $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}_E\}$
  Pour cela, il suffit de démontrer que $\operatorname{Ker} f \subset \{\vec{0}_E\}$:

Soit $\vec{x} \in E$, tel que $f(\vec{x}) = \vec{0}_F$ [1]. *Je montre que $\vec{x} = \vec{0}_E$.*

Comment démontrer qu'une application linéaire est un isomorphisme

Plusieurs stratégies sont possibles, je peux

- utiliser la **caractérisation par les bases** : si $\mathcal{B}$ est une base de E, il s'agit de prouver que $f(\mathcal{B})$ est une base de F.
- démontrer qu'elle est à la fois injective et surjective comme ci-dessus.
- trouver un inverse (à gauche et à droite !!!) (**exemple :** s_{E_1,E_2} est un automorphisme de E.)
- utiliser une relation polynomiale, pour prouver que f est un automorphisme.

▪▪▪ Exemples d'applications linéaires

Applications linéaires canoniquement associées à une matrice

Soit $f : \mathbf{K}^p \to \mathbf{K}^n$ donnée par son expression analytique. Je sais construire la matrice A canoniquement associée à f.
Inversement, étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, je sais calculer les coordonnées du vecteur image par l'application linéaire canoniquement associée, déterminer une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 41 : Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $f(x,y,z) = (2x+y-z, x-y+2z)$. Étudiez la linéarité, l'injectivité et la surjectivité de f. *réponse :* f est l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Le noyau de f est l'ensemble des solutions du SEL $AX = 0$. Après résolution, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\{(-1,5,3)\}$. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{(2,1),(1,-1),(-1,2)\} = \mathbf{R}^2$. En particulier, f est surjective et non injective.

Comment étudier un projecteur

Pour démontrer qu'un endomorphisme f est un projecteur et donner ses éléments caractéristiques,

$\boxed{1}$ je vérifie que $f \circ f = f$

$\boxed{2}$ je détermine $E_1 = \operatorname{Im} f$ en me rappelant qu'il s'agit du sev des invariants : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(f - id_E)$. Pour cela, je résous l'équation vectorielle $f(\vec{x}) = \vec{x}$.

$\boxed{3}$ je détermine $E_2 = \operatorname{Ker} f$ en résolvant l'équation vectorielle $f(\vec{x}) = \vec{0}_E$

$\boxed{4}$ en ce cas, f est la projection de E sur E_1 parallèlement à E_2.

Comment étudier un automorphisme involutif

Pour démontrer qu'un endomorphisme f est une symétrie et donner ses éléments caractéristiques,

$\boxed{1}$ je vérifie que $f \circ f = id_E$

$\boxed{2}$ je détermine $E_1 = \operatorname{Ker}(f - id_E)$ en résolvant l'équation vectorielle $f(\vec{x}) = \vec{x}$

$\boxed{3}$ je détermine $E_2 = \operatorname{Ker}(f + id_E)$ en résolvant l'équation vectorielle $f(\vec{x}) = -\vec{x}$.

$\boxed{4}$ en ce cas, f est la symétrie de E par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

---

1. i.e. $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f$