PROGRAMME DE COLLE S25

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

DIMENSION FINIE

▪▪▪ Espaces vectoriels de dimension finie

Définition : *Un* $\mathbf{K}$*-e.v. est dit de* ***dimension finie*** *s'il possède une famille génératrice finie.*

Proposition.— Soit E un e.v. de dim finie sur $\mathbf{K}$. Soit $\mathcal{L}$ (*resp.* $\mathcal{G}$) une famille finie et **libre** (*resp.* génératrice) de vecteurs de E, telles que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{G}$. Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$.

Théorème*.— Théorème de la base incomplète/extraite —.Soit E un $\mathbf{K}$-e.v. de dim finie sur $\mathbf{K}$.

- Toute famille libre finie $\mathcal{L}$ de vecteurs de E peut être complétée en une base de E.
- De toute famille génératrice finie $\mathcal{G}$ de E, on peut extraire une base.

Corollaire.— Tout espace de dimension finie possède des bases.

Théorème*.— Théorème de la dimension —. Soit E un $\mathbf{K}$ e.v. de type fini. Alors toutes les bases de E ont même cardinal. Cet entier est appelé la **dimension de** E.

Théorème.— Caractérisation des espaces de dimension n —. Soit E un e.v. sur $\mathbf{K}$ et $n \in \mathbf{N}^\star$. Alors

E est de dimension finie n *si et seulement si* E est isomorphe à $\mathbf{K}^n$.

Connaître : les exemples classiques d'espaces vectoriels de dim finie et leur dimension.

▪▪▪ Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Théorème*.— Dimension d'un sous-espace —. Soit E un $\mathbf{K}$-e.v. de dim finie et F un s.e.v. de E. Alors

- F est de dim finie et $\dim F \leq \dim E$.
- De plus $F = E$ *si et seulement si* $\dim F = \dim E$.

Théorème.— Théorème des quatre dimensions —. Soit F, G des s.e.v. d'un $\mathbf{K}$-e.v. de dimension finie E. Alors F, G,$F \cap G$ et $F + G$ sont de dimensions finies et

$$\boxed{\dim\big(F+G\big) + \dim\big(F \cap G\big) = \dim F + \dim G}$$

Théorème.— Caractérisation des supplémentaires en dim finie —. Soit F et G deux s.e.v d'un $\mathbf{K}$-e.v. E de dim finie. Alors

$$F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires } \textit{ ssi } \begin{cases} \bullet & F \cap G = \{\vec{0}_E\} \\ \bullet & \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}$$

.

Théorème.— Existence de supplémentaires en dim finie —. Soit E un $\mathbf{K}$-e.v. de dim et F un s.e.v. de E. Alors F possède un supplémentaire G dans E. De plus $\dim G = \dim E - \dim F$

Savoir-faire : construire un supplémentaire de F au moyen d'une base adaptée.

Familles de vecteurs en dimension finie

Proposition.— Familles libres et génératrices en dim finie —. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-e.v. de dimension finie n. Alors

- si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\mathcal{F}$ est finie et $\mathsf{Card}\ (\mathcal{F}) \leq n$.
- si $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $\mathcal{F}$ est infinie ou $\mathsf{Card}\ (\mathcal{F}) \geq n$.
- si $\mathsf{Card}\ (\mathcal{F}) > n$, alors $\mathcal{F}$ est liée.
- si $\mathsf{Card}\ (\mathcal{F}) < n$, alors $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice.

Vocabulaire : *Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-e.v. de **dimension finie** n.*

- *$\mathcal{F}$ est libre maximale, si $\mathcal{F}$ est libre et de **cardinal** n.*
- *$\mathcal{F}$ est génératrice minimale, si $\mathcal{F}$ est génératrice et de **cardinal** n.*

Théorème.— Caractérisation des bases en dim finie —. Soit E un $\mathbf{K}$-e.v. de dimension finie et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$\mathcal{F}$ est une base *si et seulement si* $\mathcal{F}$ est libre maximale *si et seulement si* $\mathcal{F}$ est génératrice minimale

Définition : Rang d'une famille de vecteurs —. *On note* $\mathsf{Rg}\,\mathcal{F} = \mathsf{dim}\,\mathsf{Vect}_{\mathbf{K}}(\mathcal{F})$.

Proposition.— Soit $\mathcal{F}$ une famille de $\boldsymbol{p}$ vecteurs d'un $\mathbf{K}$-e.v. E de dimension finie $\boldsymbol{n} \in \mathbf{N}$. Alors $\mathsf{Rg}\,\mathcal{F} \leq \min\{n, p\}$.

Théorème.— Soit $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs d'un $\mathbf{K}$-e.v. E de dimension $n \in \mathbf{N}$. Alors

- $\mathscr{F}$ est génératrice de E *si et seulement si* $\mathsf{Rg}\,\mathscr{F} = n$.
- $\mathscr{F}$ est libre dans E *si et seulement si* $\mathsf{Rg}\,\mathscr{F} = p$.
- $\mathscr{F}$ est une base de E *si et seulement si* $\mathsf{Rg}\,\mathscr{F} = n = p$.

Applications linéaires en dimension finie

Théorème.— Formule du rang —. Soit E et F des e.v. et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est de dim finie. Alors $\mathsf{Ker}\,u$ et $\mathsf{Im}\,u$ sont de dim finie et

$$\boxed{\mathsf{dim}\,E = \mathsf{dim}\,\mathsf{Im}\,u + \mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\,u}$$

Théorème.— Caractérisation des isomorphismes en dim finie —. Soit E et F deux $\mathbf{K}$-e.v. de dim finie et de **même dimension** et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

u est un isomorphisme *si et seulement si* u est injectif *si et seulement si* u est surjectif

Remarque : ce résultat s'applique en particulier aux endomorphismes d'un $\mathbf{K}$-e.v. de dim finie.

Définition : Rang d'une application linéaire —. *Soit E et F deux $\mathbf{K}$-e.v. et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est de dim finie. On appelle **rang de** u, et on note $\mathsf{Rg}\,u$, la dimension de $\mathsf{Im}\,u$.*

Proposition.— Soit E et F des $\mathbf{K}$-e.v. de dim finies respectives p et n, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\mathsf{Rg}\,u \leq \min\{n, p\}$.

Théorème.— Soit E et F deux $\mathbf{K}$-e.v. de dim finies respectives p et n, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

- f est injective *si et seulement si* $\mathsf{Rg}\,f = \mathsf{dim}\,E$.
- f est surjective *si et seulement si* $\mathsf{Rg}\,f = \mathsf{dim}\,F$.
- f est un isomorphisme *si et seulement si* $\mathsf{Rg}\,f = n = p$.