PROGRAMME DE COLLE S20

NB : seules les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

■■■ Formule de Taylor-Young

Polynômes de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$

Définition : *Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$ et $a \in I$. On appelle **polynôme de Taylor** de f en a de degré inférieur ou égal à n, le polynôme T_n défini par :*

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Formule de Taylor-Young

Théorème*.— Formule de Taylor-Young —. Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier naturel et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant a. Alors

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)^n\big)$$

■■■ Développements limités

Définitions

Définition : *Soit I un intervalle, $a \in \bar{I}$, $f : I \setminus \{a\} \to \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. On dit que f admet un **développement limité à l'ordre** n au voisinage de a s'il existe un polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que*

$$(DL_n(a)) \quad \forall x \in I\setminus\{a\},\ f(x) = P(x-a) + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)^n\big) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)^n\big)$$

Définition : *Soit I un intervalle nom majoré, $f : I \to \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. On dit que f admet un **développement limité à l'ordre** n **au voisinage de** $+\infty$ s'il existe un polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que*

$$(DL_n(+\infty)) \qquad \forall x \in I \cap \mathbf{R}^{+\star}\ f(x) = P\big(\frac{1}{x}\big) + \underset{+\infty}{o}\big(\frac{1}{x^n}\big) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \underset{+\infty}{o}\big(\frac{1}{x^n}\big)$$

Savoir-faire : pour déterminer un développement limité au voisinage de a (resp. $\pm\infty$), le changement de variable $x = a + t$ (resp. $x = 1/t$) permet de se ramener au voisinage de 0.

Théorème*.— Développement de Taylor-Young —. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$, $a \in I$. Alors f possède un développement limité à l'ordre n au point a donné par la **Formule de Taylor-Young**.

Propriétés des fonctions admettant un DL

Théorème*.— Unicité du développement limité —. Soit $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbf{R}$ une fonction possédant un développement limité d'ordre n au voisinage de a :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big).$$

Les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont alors uniquement déterminés.

Corollaire*.— Régularité des fonctions possédant un $DL_n(a)$ —. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction admettant un développement limité à l'ordre $n \in \mathbf{N}$ en un point a de I :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big).$$

- Si $n \geq 0$, alors f est continue au point a et $f(a) = a_0$.
- Si $n \geq 1$, alors f est dérivable au point a et $f'(a) = a_1$.

Remarque : lorsque $a \in \bar{I}$, et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbf{R}$ admet un $DL_n(a)$, $(n \in \mathbf{N})$ alors f est prolongeable par continuité en a en posant $\tilde{f}(a) = a_0$. Si de plus, $n \in \mathbf{N}^\star$, alors ce prolongement est dérivable en a et $\tilde{f}'(a) = a_1$.

Développements limités usuels

Théorème.— Au voisinage de l'origine, les fonctions usuelles admettent des développements limités de tous ordres :

$$\begin{array}{rrcl}
 & e^x & = & 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
 & \operatorname{ch}(x) & = & 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\
 & \operatorname{sh}(x) & = & x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
 & \cos(x) & = & 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} - \cdots (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\
 & \sin(x) & = & x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
 & \tan(x) & = & x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5) \\
\alpha \in \mathbf{R}, & (1+x)^\alpha & = & 1 + \alpha\, x + \alpha\,(\alpha-1)\dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\dfrac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
 & \dfrac{1}{1-x} & = & 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
 & \dfrac{1}{1+x} & = & 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
 & \ln(1+x) & = & x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n) \\
 & \operatorname{Arctan}(x) & = & x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{array}$$

Obtention de développements limités

Théorème*.— Opérations sur les développements limités —. Soit f et g admettent des DL d'ordre n à l'**origine** :

$$f(x) = P(x) + o\big(x^n\big) \text{ et } g(x) = Q(x) + o\big(x^n\big), \qquad \text{avec } (P, Q) \in \mathbf{R}_n[X] \times \mathbf{R}_n[X]$$

Alors

- $(f+g)(x) = (P+Q)(x) + o\big(x^n\big)$
- $(f \times g)(x) = R(x) + o\big(x^n\big)$, où $R \in \mathbf{R}_n[X]$ est le polynôme $P \times Q$ *tronqué* à l'ordre n.
- si de plus $\boldsymbol{f(0) = 0}$, $(g \circ f)(x) = R(x) + o\big(x^n\big)$, où R est le polynôme $Q \circ P$ *tronqué* à l'ordre n.
- si de plus $\boldsymbol{f(0) = 0}$, $\dfrac{1}{1+f(x)} = R(x) + o\big(x^n\big)$ où R est le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^k(x)$ *tronqué* à l'ordre n.
- si F est une primitive de f sur I, alors $F(x) = F(0) + \displaystyle\int_0^x P(t)\,dt + o(x^{n+1})$

Savoir-faire : la mise en œuvre de ces opérations ne s'improvise pas ! vous devez vous entrainer !

■■■ Applications des développements limités

- au calcul des limites, et à la recherche d'équivalents de fonctions
- à l'étude locale des fonctions : continuité, dérivabilité
- à la recherche de tangentes, à l'étude des positions relatives du graphe et d'une tangente
- à l'étude des branches infinies des fonctions au moyen d'un développement limité au voisinage de $\pm\infty$