TECHNIQUES & MÉTHODES S15

NB : cette fiche reprend les techniques nécessaires **minimales**; elle ne constitue donc pas un objectif, mais un prérequis !

SUITES NUMÉRIQUES (II)

▪▪▪ Équivalents et comparaisons de suites

J'utilise les équivalents usuels et les règles de calcul sur les équivalents pour déterminer la limite ou un équivalent simple d'une suite.

Exercice 23 : Déterminez un équivalent de $u_n = \left(\dfrac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^n$.

réponse : $u_n \sim e^{-2}$.

▪▪▪ Suites classiques

À partir de la donnée de conditions initiales et d'une relation de récurrence, je sais reconnaître une suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique, ou une suite RL2. Je peux alors déterminer l'expression du terme général en fonction de n.

Exercice 24 : Déterminez u_n en fonction de n lorsque $\begin{cases} u_0 = 0; u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$.

réponse : $u_n = -\frac{2^n}{\sqrt{3}} \sin(4n\pi/3)$.

▪▪▪ Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Je sais mettre en œuvre la méthode d'étude d'une suite récurrente $\begin{cases} u_0 = a \in I \\ \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

$\boxed{1}$ Définition de la fonction itératrice f : la suite (u_n) sera bien définie pourvu que le premier terme appartienne à un intervalle stable pour f.
$\boxed{2}$ Étude du signe de la fonction $h : x \mapsto f(x) - x$ et des variations de f. Les solutions de $h(x) = 0$ sont les points fixes de f. Je présente ces résultats dans une tableau de variation et de signe.
$\boxed{3}$ Représentation graphique de f et de Id : je repère des intervalles stables, et je "construis" les premiers termes.
$\boxed{4}$ À l'aide des théorèmes sur les suites récurrentes, j'en déduis la monotonie et la convergence, de la suite (u_n), ou des suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

Exercice 25 : étudiez (monotonie, convergence, limite) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3/2 \\ \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \end{cases}$.

réponse : (u_n) est décroissante, convergente de limite $\sqrt{2}$.

En utilisant le **TAF**, j'obtiens des estimations pour la convergence d'une suite récurrente :

Exercice 26 : Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos(x)$ et (u_n) définie par $u_0 = a \in \mathbf{R}$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$. Montrez que $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \left|u_{n+1} - \frac{\pi}{6}\right| \leq \left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)^n \left|a - \frac{\pi}{6}\right|$. *réponse :* d'après le TAF f est lipschitzienne de constante $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ donc strictement contractante. De plus, $\frac{\pi}{6}$ est un point fixe de f. En ce cas, $\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_{n+1} - \frac{\pi}{6}| \leq \left|f(u_n) - f(\frac{\pi}{6})\right| \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}|u_n - \frac{\pi}{6}|$. Le résultat en découle par récurrence.

▪▪▪ Suites définies implicitement

Soit $f_n : I \to \mathbf{R}$, on note (E_n) l'équation $f_n(x) = 0$. Je sais mettre en œuvre la méthode d'étude de la suite définie implicitement par (E_n) :
$\boxed{1}$ étude de f_n continuité et variation
$\boxed{2}$ à l'aide du théorème de la bijection, je montre que (E_n) a une unique solution u_n dans l'intervalle I. J'en déduis la "définition" de la suite (u_n) : $\begin{cases} u_n \in I \\ f_n(u_n) = 0 \end{cases}$
$\boxed{3}$ je sais utiliser la stricte monotonie de f_n pour établir un encadrement de u_n ou comparer u_n et u_{n+1}
$\boxed{4}$ je montre alors la convergence de (u_n) en utilisant une comparaison ou le théorème de la **Li-Mo**.

Exercice 27 : Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Montrez que l'équation $x^3 + nx = 1 \qquad (E_n)$
admet une unique racine réelle notée u_n. Montrez que $\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ et conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

réponse : $f_n(x) = x^3 + nx$ est strictement croissante et continue sur $\mathbf{R}^+$. Théorème BIJ applies. $f_n(0) \leq 1 \leq f_n(1/n)$ entraîne $0 \leq u_n \leq 1/n$. Théorème de convergence par encadrement. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.