Chapitre 21

Applications linéaires

Sommaire

I Généralités . . . 512
1 Définitions . . . 512
2 Opérations sur les applications linéaires . . . 513
3 Isomorphismes . . . 514
4 Endomorphismes . . . 516
II Noyau et image d'une application linéaire . . . 518
1 Image d'une application linéaire . . . 518
2 Noyau d'une application linéaire . . . 519
III Image d'une base par une application linéaire . . . 522
1 Les images des vecteurs d'une base engendrent l'image de f . . . 522
2 Une application linéaire est caractérisée par les images des vecteurs d'une base . . . 523
3 Caractérisation des applications lineaires in/sur/bi -jectives . . . 524
IV Exemples d'applications linéaires . . . 525
1 Applications linéaires de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$ . . . 525
2 Dérivation des polynômes . . . 527
3 Intégrale des fonctions continues . . . 527
4 Projecteurs et projections . . . 527
5 Involutions et symétries . . . 530
6 Affinités vectorielles . . . 532
V How To . . . 533

OBJECTIFS

A la fin du chapitre, vous devez savoir
- ▷ démontrer qu'une application est linéaire
- ▷ déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire
- ▷ étudier l'in/sur/bi - jectivité d'une application linéaire

et connaître les exemples classiques d'applications linéaires
- ▷ application linéaire canoniquement associée à une matrice
- ▷ dérivée, intégrale
- ▷ projecteurs, symétries, et plus si affinités,*etc...*

Introduction

Nous avons vu **Chapitre 23**, que l'on pouvait présenter l'ensemble des *solutions d'une équation linéaire*[1] dans $\mathbf{K}^n$ sous *forme paramétrée*, c'est-à-dire comme sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs. Ces deux points de vue (équations VS paramétrage) se généralisent aux sous-espaces vectoriels de n'importe quel espace vectoriel E grâce à la notion d'***application linéaire*** :
Etant donnés E et F deux espaces vectoriels sur un même corps de scalaires, on s'intéresse aux applications f de E vers F qui préservent la structure d'espace vectoriel, en ce sens que l'image par f d'une combinaison linéaire de vecteurs de E est la combinaison linéaire des images par f de ces vecteurs.
Nous retrouvons les deux points de vue :

- **point de vue équations :** on s'intéresse à l'ensemble –appelé le *noyau* de f– des solutions dans E de l'équation

$$\mathsf{Ker}\, f = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \vec{0}_F\}$$

- **point de vue paramétrage :** on s'intéresse à l'ensemble –appelé l'*image de* f– des images de vecteurs de E par f :

$$\begin{aligned} \mathsf{Im}\, f &= \{f(\vec{x})\,,\ \vec{x} \in E\} \\ &= \{\vec{y} \in F \mid \exists \vec{x} \in E\,,\ \vec{y} = f(\vec{x})\} \end{aligned}$$

I Généralités

Dans cette première section, nous découvrons la notion d'application linéaire et les opérations sur de telles applications. Pour bien comprendre les mécanismes qui s'opèrent ici, la comparaison avec les matrices est très riche.

1 Définitions

Définition : *Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbf{K}$. Une application $f : E \to F$ est appelée une **application linéaire** de E dans F si :*

- $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E \times E, \quad f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
- $\forall (\lambda, \vec{x}) \in \mathbf{K} \times E, \quad f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x})$

Notation : *On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.*

Commentaires : en clair une application linéaire *préserve les combinaisons linéaires* :

[1] un système d'équations linéaires

Proposition 21.1.— Caractérisation des applications linéaires
Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application de E dans F. Alors, pour tout couple de scalaires $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$ et pour tout couple de vecteurs $(\vec{x},\vec{y}) \in E \times E$, on a :

$$\begin{array}{c} f \text{ est linéaire} \\ \textit{si et seulement si} \\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2,\ \forall (\vec{x},\vec{y}) \in E \times E, \qquad f(\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y}) = \lambda \cdot f(\vec{x}) + \mu \cdot f(\vec{y}) \end{array}$$

En particulier, $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.

Commentaires : en clair, si f est linéaire, l'**image** par f **d'une combinaison linéaire** de vecteurs **est la combinaison linéaires des images** des vecteurs.

En pratique : cette caractérisation remplace souvent la définition.

Vocabulaire :

- *Lorsque $F = E$, une application linéaire de E dans lui-même est appelée un* ***endomorphisme*** *de E. On note simplement $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.*
- *Lorsque $F = \mathbf{K}$, une application linéaire de E dans K est appelée une* ***forme linéaire*** *sur E. On note $E^\star$ l'ensemble[2] des formes linéaires sur E.*

Exemples :

1. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ définie par
$$\forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3, \quad f(x_1,x_2,x_3) = (2\ x_3 - 4\,x_2 + x_1,\ x_1 + 3\ x_2 - x_3)$$
est une application linéaire.

2. L'application $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ définie par
$$\forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3, \quad f(x_1,x_2,x_3) = x_1\ x_3 - 4\ x_2$$
n'est pas linéaire.

3. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. L'application identité $Id_E : E \to E$ est une application linéaire de E dans lui-même, il s'agit donc d'un endomorphisme de E.

4. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. L'homothétie vectorielle de rapport κ, $h : E \to E$ définie par
$$\forall \vec{x} \in E, \quad h(\vec{x}) = \kappa \cdot \vec{x}$$
est un endomorphisme de E.

5. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. La translation de vecteur $\vec{a}$, $\tau : E \to E$ définie par
$$\forall \vec{x} \in E, \quad h(\vec{x}) = \vec{a} + \vec{x}$$
n'est pas linéaire, sauf si $\vec{a} = \vec{0}_E$.

2 Opérations sur les applications linéaires

2.a Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,\ F)$

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbf{K}$. L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-ensemble des applications de E vers F. Ainsi que nous l'avons démontré au chapitre précédent, $\mathscr{F}(E,F)$ est un $\mathbf{K}$-e.v. car F l'est. Comme tel, on peut définir

■ **Somme de deux applications linéaires**
Soient f et g deux applications linéaires de E dans F, on définit leur somme par :
$$\begin{array}{rccc} f+g\ : & E & \to & F \\ & \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \end{array}$$

■ **Multiplication d'une application linéaire par un scalaire**
Etant donnés une application $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$, on définit la fonction $\lambda \cdot f$ par :
$$\begin{array}{rccc} \lambda \cdot f\ : & E & \to & F \\ & \vec{x} & \mapsto & \lambda \cdot f(\vec{x}) \end{array}$$

[2] $E^\star$ est appelé le **dual** de E.

Comme de plus, f et g sont des applications linéaires de E vers F, la somme $f+g$ et l'application $\lambda \cdot f$ sont encore linéaires. Ainsi, $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-ensemble non vide de $\mathscr{F}(E,F)$ et stable par combinaison linéaire. Autrement dit :

Proposition 21.2.— Muni de l'addition et de la multiplication externe définies ci-dessus,

$\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Commentaires : $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ aussi !

Démonstration ▽
il suffit de vérifier que $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E,F)$.

- Il est clair que l'application nulle de E vers F est linéaire.
- Montrons que $\mathcal{L}(E,F)$ est stable pour l'addition :
  Soit donc $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)$, montrons que $f+g$ est linéaire : soit $(\vec{x}_1,\vec{x}_2) \in E^2$, et $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{K}^2$.

$$\begin{aligned}\big(f+g\big)\big(\lambda_1\cdot\vec{x}_1+\lambda_2\cdot x_2\big) &= f\big(\lambda_1\cdot\vec{x}_1+\lambda_2\cdot x_2\big)+g\big(\lambda_1\cdot\vec{x}_1+\lambda_2\cdot x_2\big)\\ &= \lambda_1 f(\vec{x}_1)+\lambda_2 f(\vec{x}_2)+\lambda_1 g(\vec{x}_1)+\lambda_2 g(\vec{x}_2)\\ &= \lambda_1(f+g)(\vec{x}_1)+\lambda_2(f+g)(\vec{x}_2)\end{aligned}$$

  Ainsi, $f+g$ préserve les combinaisons linéaires, $f+g$ est donc bien une application linéaire de E dans F.
- Montrons que $\mathcal{L}(E,F)$ est stable par la multiplication externe :
  Soit donc $\mu \in \mathbf{K}$, $f \in \mathcal{L}(E)$, montrons que $\mu \cdot f$ est linéaire : soit $(\vec{x}_1,\vec{x}_2) \in E^2$, et $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{K}^2$. Alors

$$\begin{aligned}\big(\mu\cdot f\big)\big(\lambda_1\cdot\vec{x}_1+\lambda_2\cdot x_2\big) &= \mu\cdot f\big(\lambda_1\cdot\vec{x}_1+\lambda_2\cdot x_2\big)\\ &= \mu\cdot\big(\lambda_1\cdot f(\vec{x}_1)+\lambda_2\cdot f(x_2)\big)\\ &= \lambda_1(\mu\cdot f)(\vec{x}_1)+\lambda_2\big(\mu f\big)(\vec{x}_2)\end{aligned}$$

  Ainsi, $\mu \cdot f$ préserve les combinaisons linéaires, il s'agit donc bien d'une application linéaire de E dans F. ▲

2.b Composition des applications linéaires

Proposition 21.3.— Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
Alors l'application composée $g \circ f : E \to G$ est une application linéaire de E dans G.

Commentaires : Bien sûr pour composer des applications linéaires, il y a une condition de compatibilité. Pour multiplier des matrices aussi !

Démonstration ▽
L'application $h = g \circ f$ est bien définie dans E à valeurs dans G. Montrons qu'elle est linéaire :
Soit $(\vec{x}_1,\vec{x}_2) \in E^2$, $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{K}^2$. Alors

$$\begin{aligned}h(\lambda_1\cdot\vec{x}_1+\lambda_2\cdot\vec{x}_2) &= g\Big(f(\lambda_1\cdot\vec{x}_1+\lambda_2\cdot\vec{x}_2)\Big)=g\Big(\lambda_1\cdot f(\vec{x}_1)+\lambda_2\cdot f(\vec{x}_2)\Big)\\ &= \lambda_1\cdot g\big(f(\vec{x}_1)\big)+\lambda_2\cdot g\big(f(\vec{x}_2)\big)=\lambda_1\cdot h(\vec{x}_1)+\lambda_2\cdot h(\vec{x}_2).\end{aligned}$$

▲

3 Isomorphismes

Définition : *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$. On appelle **isomorphisme** de E sur F toute application linéaire et bijective f de E sur F.*

Vocabulaire :

- *lorsque $F = E$, un isomorphisme de E sur lui-même est appelé un **automorphisme** de E. On note simplement $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.*
- *étant donnés deux espaces vectoriels, il n'existe pas nécessairement d'isomorphisme de E sur F. Lorsqu'il existe un isomorphisme de E sur F, on dit que E et F sont **isomorphes**.*

Exemples :

1. Il n'existe pas d'isomorphisme de $\{\vec{0}\}$ sur $\mathbf{R}$ puisque ces deux ensembles ne sont pas en bijection !

2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$, alors Id_E est un automorphisme de E.

3. Si $\kappa \in \mathbf{K}^\star$, l'homothétie de rapport κ est un automorphisme de E.

4. $\mathbf{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$ sont isomorphes.

Proposition 21.4.— Isomorphisme réciproque
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ un isomorphisme de E sur F. Alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E, appelé **isomorphisme réciproque** de f.

Démonstration ▽
Comme f est bijective, l'application réciproque f^{-1} de f est bien définie et bijective d'après le **Théorème** 6.16. Il s'agit de montrer que f^{-1} est linéaire.
Soit donc $(\vec{w},\vec{z}) \in F \times F$, $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K}$. Comme f est bijective, $\vec{w}$ et $\vec{z}$ possèdent chacun un unique antécédent par f. Notons $\vec{x} = f^{-1}(\vec{w})$ et $\vec{y} = f^{-1}(\vec{z})$ de sorte que

$$\vec{w} = f(\vec{x}) \quad \text{et} \quad \vec{z} = f(\vec{y})$$

Utilisons la linéarité de f, il vient

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda\cdot\vec{w}+\mu\cdot\vec{z}) &= f^{-1}\big(\lambda\cdot f(\vec{x})+\mu\cdot f(\vec{y})\big) = f^{-1}\big(f(\lambda\cdot\vec{x})+f(\mu\cdot\vec{y})\big) \\ &= f^{-1}\Big(f\big((\lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{y})\big)\Big) = \lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{y} \\ &= \lambda\cdot f^{-1}(\vec{w})+\mu\cdot f^{-1}(\vec{z}). \end{aligned}$$

▲

Exercice : Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application définie par

$$\forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3, \quad f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+2x_2+x_3,\ x_1+3x_2+2x_3,\ 2x_1+2x_2+5x_3)$$

1. Montrez que f est une application linéaire.

2. Montrez que f est bijective.

3. En déduire que f est un automorphisme de $\mathbf{R}^3$ et déterminez son isomorphisme réciproque.

Solution ▽

1. *Soit $(\vec{u},\vec{v})$ un couple de vecteurs de $\mathbf{R}^3$. Par définition de f, il vient :*

$$\begin{aligned} & f(\vec{u}+\vec{v}) = f\big(u_1+v_1;u_2+v_2;u_3+v_3\big) \\ = \ & \big((u_1+v_1)+2(u_2+v_2)+(u_3+v_3);(u_1+v_1)+3(u_2+v_2)+2(u_3+v_3);2(u_1+v_1)+2(u_2+v_2)+5(u_3+v_3)\big) \\ = \ & \big(u_1+2u_2+u_3;u_1+3u_2+2u_3;2u_1+2u_2+5u_3\big)+\big(v_1+2v_2+v_3;v_1+3v_2+2v_3;2v_1+2v_2+5v_3\big) \\ = \ & f(\vec{u})+f(\vec{v}) \end{aligned}$$

De la même manière, si $\vec{u}$ est un vecteur de $\mathbf{R}^3$ et λ un scalaire, j'obtiens :

$$\begin{aligned} f(\lambda\cdot\vec{u}) &= f\big(\lambda u_1;\lambda u_2;\lambda u_3\big) \\ &= \big((\lambda u_1+2\lambda u_2+\lambda u_3;\lambda u_1+3\lambda u_2+2\lambda u_3;2\lambda u_1+2\lambda u_2+5\lambda u_3\big) \\ &= \lambda\cdot\big(u_1+2u_2+u_3,\ u_1+3u_2+2u_3,\ 2u_1+2u_2+5u_3\big) = \lambda\cdot f(\vec{u}) \end{aligned}$$

2. *Pour démontrer que f est bijective, j'adopte le point de vue équations.*
Soit $\vec{y} = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbf{R}^3$ un vecteur quelconque. Il s'agit[3] *de prouver que l'équation vectorielle :*

$$f(\vec{x}) = \vec{y} \tag{21.1}$$

[3] cf **Chapitre 10**

admet une unique solution.
L'équation vectorielle (21.1) *se traduit par un système que j'échelonne via* Gauss *:*

$$(21.1) \iff \left\{\begin{array}{rrrl} x_1 & +2x_2 & +x_3 = y_1 \\ x_1 & +3x_2 & +2x_3 = y_2 \\ 2x_1 & +2x_2 & +5x_3 = y_3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrl} x_1 & +2x_2 & +x_3 = y_1 \\ & x_2 & +x_3 = y_2 - y_1 \\ & -2x_2 & +3x_3 = y_3 - 2y_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl} \boxed{1}x_1 & +2x_2 & +x_3 = y_1 \\ & \boxed{1}x_2 & +x_3 = -y_1 + y_2 \\ & & \boxed{5}x_3 = -4y_1 + 2y_2 + y_3 \end{array}\right.$$

Ainsi, (21.1) *est équivalente à un système triangulaire à coefficients diagnonaux non nuls, donc de* Cramer*. Par conséquent cette équation admet une unique solution. Autrement dit, tout vecteur $\vec{y}$ admet un unique antécédent par f, ce qui signifie précisément que cette application est bijective.*

3. *Comme f est linéaire et bijective, il s'agit d'un automorphisme de $\mathbf{R}^3$. Pour déterminer l'automorphisme réciproque de f, poursuivons la résolution de* (21.1)*. Par remontée, j'obtiens :*

$$(21.1) \iff \left\{\begin{array}{rrrl} x_1 = & \frac{11}{5}y_1 & -\frac{8}{5}y_2 & +\frac{1}{5}y_3 \\ x_2 = & -\frac{1}{5}y_1 & +\frac{3}{5}y_2 & -\frac{1}{5}y_3 \\ x_3 = & -\frac{4}{5}y_1 & +\frac{2}{5}y_2 & +\frac{1}{5}y_3 \end{array}\right.$$

D'où je tire

$$\forall \vec{y} = (y,y_2,y_3) \in \mathbf{R}^3, \quad f^{-1}(\vec{y}) = \big(\frac{11}{5}y_1 - \frac{8}{5}y_2 + \frac{1}{5}y_3; -\frac{1}{5}y_1 + \frac{3}{5}y_2 - \frac{1}{5}y_3; -\frac{4}{5}y_1 + \frac{2}{5}y_2 + \frac{1}{5}y_3\big)$$

▲

Exercice : Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ constitué des suites qui vérifient la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 4u_{n+2} = 3u_{n+1} + u_n$$

Soit $f : E \to \mathbf{R}^2$ l'application qui à une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ associe ses deux premiers termes (u_0, u_1).
Montrez que f est un isomorphisme.

Corollaire 21.5.— Composée d'isomorphismes
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ deux isomorphismes de E sur F et de F sur G respectivement. Alors $h = g \circ f : E \to G$ est un isomorphisme de E sur G. De plus,

$$h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Démonstration ▽
La composée de deux applications bijectives étant bijective, nous savons que h est bijective et que son application réciproque est donnée par $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. De plus d'après la proposition précédente, h est aussi linéaire comme composée de telles applications. Par définition, h est donc un isomorphisme de E sur G. ▲

4 Endomorphismes

4.a L'anneau des endomorphismes

Etant donnés deux endomorphismes f et g de E, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bien définis en tant qu'endomorphismes. Autrement dit, la composition des applications est une lci dans $\mathcal{L}(E)$. Plus précisément,

Proposition 21.6.— Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

$$\big(\mathcal{L}(E), +, \circ\big) \text{ est un anneau.}$$

Démonstration ▽

- on a déjà prouvé que $\big(\mathcal{L}(E), +\big)$ est un groupe abélien.

- on sait que $\circ$ est associative
- id_E est l'élément neutre pour $\circ$.
- montrons que $\circ$ est distributive sur $+$:
  Soit $(u,v,w) \in \mathcal{L}(E)^3$. Pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, on a :

$$\begin{array}{rcl}(u+v)\circ w(\vec{x}) &=& (u+v)\big(w(\vec{x})\big) = u\big(w(\vec{x})\big) + v\big(w(\vec{x})\big)\\ &=& u\circ w(\vec{x}) + v\circ w(\vec{x})\\ u\circ(v+w)(\vec{x}) &=& u\big(v(\vec{x}) + w(\vec{x})\big) = u\big(v(\vec{x})\big) + u\big(w(\vec{x})\big)\\ &=& u\circ v(\vec{x}) + u\circ w(\vec{x})\end{array}$$

  Ceci étant vrai pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, c'est dire que

$$\begin{array}{rcl}(u+v)\circ w &=& u\circ w + v\circ w\\ u\circ(v+w) &=& u\circ v + u\circ w\end{array}$$

▲

Remarque : on peut donc toujours composer deux endomorphismes f et g de E. En revanche, il n'est absolument pas garanti que $f\circ g$ et $g\circ f$ définissent le même endomorphisme de E : comme l'anneau des matrices carrées, $\mathcal{L}(E)$ n'est pas un anneau commutatif.

Exemple : Considérons sur $E = \mathbf{R}^2$ les applications f et g définies par :

$$f\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & (x+y,0)\end{array} \qquad \text{et} \qquad g\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & (y,0)\end{array}$$

f et g sont clairement des endomorphismes de $\mathbf{R}^2$, de sorte que $g\circ f$ et $f\circ g$ sont bien définis.
De plus, un calcul élémentaire montre que $\forall (x,y)\in\mathbf{R}^2,\ g\circ f(x,y) = (0,0)$ et $f\circ g(x,y) = (y,0)$. Autrement dit

$$g\circ f = \vec{0}_{\mathcal{L}(E)} \text{ tandis que } f\circ g = g$$

Définition : *Soit $(f,g)\in\mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E)$. On dit que f et g **commutent** lorsque $f\circ g = g\circ f$.*

Question : l'élément neutre dans $\mathcal{L}(E)$ est l'application Id_E. Quels sont ses éléments inversibles ?

4.b Automorphismes de E

L'ensemble $GL(E)$ des automorphismes de E est en fait le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\big(L_{\mathcal{L}}), +, \circ\big)$. Retenez

Proposition 21.7.— Groupe linéaire
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel,

$$\big(GL(E), \circ\big) \text{ est un groupe.}$$

On l'appelle le **groupe linéaire**.

Commentaires : c'est l'analogue du groupe $GL_n(\mathbf{K})$ des matrices carrées inversibles d'ordre n.

4.c Puissances et polynômes d'endomorphismes

Définition : Puissances d'un endomorphisme
*Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $f\in\mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On définit les **puissances successives** de f par*

$$\begin{cases}\bullet\quad f^0 = Id_E\\ \bullet\quad \forall n\in\mathbf{N},\ f^{n+1} = f\circ f^n\end{cases}$$

Remarque : pour tout entier $n\in\mathbf{N}$, f^n est un endomorphisme de E. Comme de plus $\mathcal{L}(E)$ est stable pour la multiplication par les scalaires, nous pouvons définir les polynômes d'endomorphismes :

Définition : *Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$:*

$$P = a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

On définit pour tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par

$$\boxed{P(f) = a_p \ f^p + a_{p-1} \ f^{p-1} + \cdots + a_1 \ f + a_0 \ Id_E}$$

4.d Calculs dans $\mathcal{L}(E)$

Comme dans le cadre des matrices carrées, les règles de calculs sur les endomorphismes permettent de prouver la **Formule du binôme de Newton** et l' **Identité géométrique** sous réserve que les endomorphismes f et g commutent. La démonstration de ces propriétés suit les mêmes lignes que dans le cas des matrices. Nous renvoyons au **Chapitre 22** le lecteur intéressé.

Théorème 21.8.— Formule du binôme pour les endomorphismes
Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors pour tout entier $n \in \mathbf{N}$

$$\boxed{(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}}$$

Théorème 21.9.— Identité géométrique
Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $f \circ g = g \circ f$ et $n \in \mathbf{N}$, alors :

$$\boxed{f^{n+1} - g^{n+1} = (f-g) \circ \sum_{k=0}^{n} f^k \circ g^{n-k}}$$

Exercice : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est nilpotent d'ordre n, *it* $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrez que $Id_E - f \in GL(E)$.

II Noyau et image d'une application linéaire

1 Image d'une application linéaire

1.a Définition et propriété fondamentale

Définition : *Soit $f : E \to F$ une application linéaire de E vers F. On définit l'**image de** f comme étant l'image directe de E par f :*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathsf{Im}\, f & = & \{f(\vec{x}) \,;\, \vec{x} \in E\} \\ & = & \{\vec{y} \in F \mid \exists \vec{x} \in E;\ \vec{y} = f(\vec{x})\} \end{array}}$$

Remarque : $\mathsf{Im}\, f$ est un sous-ensemble de F. Comme f est linéaire, $\vec{0}_F = f(\vec{0}_E) \in \mathsf{Im}\, f$. En fait,

Proposition 21.10.— Soit $f : E \to F$ une application linéaire, alors

$$\boxed{\mathsf{Im}\, f \text{ est un sous-espace vectoriel de } F}$$

Démonstration ▽
Pour démontrer que $\mathsf{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de F, j'utilise la **caractérisation des sous-espaces vectoriels** de F.

- $\mathsf{Im}\, f$ **est non vide**
  Comme f est linéaire, $\vec{0}_F = f(\vec{0}_E) \in \mathsf{Im}\, f$.

■ $\mathsf{Im}\, f$ **est stable par combinaison linéaire**
Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2$ et $(\vec{y}_1,\vec{y}_2)\in\big(\big)\mathsf{Im}\, f\big)^2$, montrons que $\lambda\cdot\vec{y}_1+\mu\cdot\vec{y}_2\in\mathsf{Im}\, f$.
Par définition de l'image de f, il existe $(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\in E$ tel que

$$\begin{array}{l}\lambda_1\times\\ \lambda_2\times\end{array}\left\|\begin{array}{rcl}\vec{y}_1 &=& f(\vec{x}_1)\\ \vec{y}_2 &=& f(\vec{x}_2)\end{array}\right.$$

Par linéarité de f, il en résulte :

$$\lambda\cdot\vec{y}_1+\mu\cdot\vec{y}_2 \quad=\quad \lambda\cdot f(\vec{x}_1)+\mu\cdot f(\vec{x}_2)=f\big(\lambda\cdot\vec{x}_1+\mu\cdot\vec{x}_2\big)$$

Comme $\lambda\cdot\vec{x}_1+\mu\cdot\vec{x}_2$ est élément de E, $\lambda\cdot\vec{y}_1+\mu\cdot\vec{y}_2$ est l'image par f d'un vecteur de E. Par définition, ceci revient précisément à dire que $\lambda\cdot\vec{y}_1+\mu\cdot\vec{y}_2\in\mathsf{Im}\, f$. ▲

Exercice : Soit $f:E\to F$ une application linéaire de E vers F. Montrez que si E_1 est un s.e.v. de E, alors $f(E_1)$ est un s.e.v. de F.

Exercice : Soit $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2,\quad f(x,y)=(2x-y;x-3y;x+y)$$

Déterminez une base de $\mathsf{Im}\, f$. f est-elle surjective ?

Solution ▽
Ecrivons pour tout couple $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $f(x,y)=x\cdot(2;1;1)+y\cdot(-1;-3;1)$, *de sorte que*

$$\mathsf{Im}\, f=\{f(x,y)\ ;\ (x,y)\in\mathbf{R}^2\}$$

apparaît comme l'ensemble des combinaisons linéaires des deux vecteurs $(2;1;1)$ *et* $(-1;-3;1)$. *Ils forment donc une famille génératrice de* $\mathsf{Im}\, f$. *Comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, cette famille est libre. Il s'agit donc d'une base de* $\mathsf{Im}\, f$.
▲

1.b Caractérisation des applications linéaires surjectives

Proposition 21.11.— Soient E,F des espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$ et $f\in\mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire de E vers F, alors

$$\boxed{f \text{ est surjective } \textit{si et seulement si } \ \mathsf{Im}\, f=F}$$

Démonstration ▽
$\mathsf{Im}\, f=F\iff F\subset\mathsf{Im}\, f\iff\forall\vec{y}\in F,\ \exists\vec{x}\in E$ tel que $\vec{y}=f(\vec{x})\iff f$ est surjective. ▲

Exercice : Soit $f\in E^\star$ une forme linéaire sur E. Démontrez que
- ou bien f est constante égale à 0 ;
- ou bien f est surjective.

2 Noyau d'une application linéaire

2.a Définition et propriété fondamentale

Définition : *Soit* $f:E\to F$ *une application linéaire. On appelle* ***noyau de*** f, *et on note* $\mathsf{Ker}\, f$ *l'ensemble des antécédents de* $\vec{0}_F$ *par* f *:*

$$\boxed{\mathsf{Ker}\, f=\vec{f}^{\,1}\{\vec{0}_F\}=\{\vec{x}\in E\mid f(\vec{x})=\vec{0}_F\}}$$

Commentaires : $\mathsf{Ker}\, f$ est l'ensemble des solutions de l'équation linéaire vectorielle

$$f(\vec{x})=\vec{0}_F$$

En pratique : retenez que pout tout vecteur $\vec{x}\in E$,

$$\vec{x}\in\mathsf{Ker}\, f\iff f(\vec{x})=\vec{0}_F$$

Remarque : $\mathsf{Ker}\, f$ est un sous-ensemble de E, qui contient $\vec{0}_E$. En fait ,

Proposition 21.12.— Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors

$\mathsf{Ker}\, f$ est un sous-espace vectoriel de E

Commentaires : autrement dit, l'ensemble des solutions d'une équation linéairre est un sous-espace vectoriel.

Démonstration ▽

Pour démontrer que $\mathsf{Ker}\, f$ est un sous-espace vectoriel de E, j'utilise la **caractérisation des sous-espaces vectoriels** :

- $\mathsf{Ker}\, f$ **est non vide**
  Comme f est linéaire, $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$, autrement dit $\vec{0}_E \in \mathsf{Ker}\, f$.
- $\mathsf{Ker}\, f$ **est stable par combinaison linéaire**
  Soit $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in \big(\mathsf{Ker}\, f\big)^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$. Comme $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2) = \vec{0}_F$, il découle par linéarité de f que

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{x}_2) &= \lambda_1 \cdot f(\vec{x}_1) + \lambda_2 \cdot f(\vec{x}_2) \\ &= \lambda_1 \cdot \vec{0}_F + \lambda_2 \cdot \vec{0}_F = \vec{0}_F \end{aligned}$$

  Ainsi, $\lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{x}_2$ appartient à $\mathsf{Ker}\, f$.

▲

Exercice : Soit $f : E \to F$ une application linéaire de E vers F. Montrez que si F_1 est un s.e.v. de F, **alors** $\vec{f}^{\,1}(F_1)$ est un s.e.v. de E.

Solution ▽

- *Comme F_1 est un s.e.v. de F, $\vec{0}_F \in F_1$. De plus, f étant linéaire $\vec{0}_F = f(\vec{0}_E)$, j'en déduis que $\vec{0}_E \in \vec{f}^{\,1}(F_1)$.*
- *Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$ et $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in \vec{f}^{\,1}(F_1)^2$, montrons que $\lambda \cdot \vec{x}_1 + \mu \cdot \vec{x}_2 \in \vec{f}^{\,1}(F_1)$.*
  Grâce à la linéarité de f, il vient

$$f\big(\lambda \cdot \vec{x}_1 + \mu \cdot \vec{x}_2\big) = \lambda \cdot f(\vec{x}_1) + \mu \cdot f(\vec{x}_2)$$

  Par définition de l'image réciproque de F_1 par f, $f(\vec{x}_1)$ et $f(\vec{x}_2)$ sont éléments de F_1. Comme F_1 est un s.e.v. de F, il est stable par combinaison linéaire. Par conséquent, $f\big(\lambda \cdot \vec{x}_1 + \mu \cdot \vec{x}_2\big) \in F_1$. Par définition de l'image réciproque, ceci revient à dire que $\lambda \cdot \vec{x}_1 + \mu \cdot \vec{x}_2 \in \vec{f}^{\,1}(F_1)$. ▲

Exercice : Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3, \quad f(x_1, x_2, x_3) = \big(3x_1 + x_2 - x_3; x_1 + x_2 + x_3\big)$$

Explicitez $\mathsf{Ker}\, f$.

Solution ▽

Il s'agit de résoudre dans $\mathbf{R}^3$ l'équation vectorielle

$$f(\vec{x}) = \vec{0} \tag{21.2}$$

Cette équation vectorielle se traduit par le système :

$$(22.3) \iff \left\{ \begin{array}{rrrr} 3x_1 & +x_2 & -x_3 = 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrrr} \boxed{3}x_1 & +x_2 & -x_3 = 0 \\ & \boxed{2}x_2 & +4x_3 = 0 \end{array} \right.$$

Ce système est échelonné, de rang 2. Il admet une variable libre. On résout par remontée : il en résulte

$$x_1 = x_3;\ x_2 = -2x_3$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathsf{Ker}\, f &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 = x_3;\ x_2 = -2x_3\} \\ &= \{(x_3, -2x_3, x_3)\ ;\ x_3 \in \mathbf{R}\} = \mathsf{Vect}_{\mathbf{R}}\{(1, -2, 1)\} \end{aligned}$$

▲

2.b Caractérisation des applications linéaires injectives

Nous l'avons vu au paragraphe précédent, l'*image* d'une application linéaire est utile lorsqu'on s'intéresse à la *surjectivité* de cette application. Le *noyau* d'une application linéaire mesure quant à lui le *défaut d'injectivité* d'une telle application. Plus précisément, nous avons

Théorème 21.13.— Soient E, F des espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire de E vers F, alors

$$f \text{ est injective } \textit{si et seulement si } \ \mathsf{Ker}\, f = \{\vec{0}_E\}$$

Commentaires : en général, pour démontrer qu'une application –pas nécessairement linéaire– est injective vous démontrez que **tout** élément de l'ensemble d'arrivée possède au plus un antécédent :

$$\forall (x_1,x_2), \quad \Big(f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2\Big)$$

Dans le cas particulier des applications linéaires, il suffit de vérifier cette propriété pour le vecteur nul :

$$\forall \vec{x} \in E, \quad f(\vec{x})=\vec{0}_F \Rightarrow \vec{x}=\vec{0}_E$$

En pratique : pour prouver que $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est injective, vous montrez que $\mathsf{Ker}\, f \subset \{\vec{0}_E\}$:

- soit $\vec{x} \in E$ tel que $f(\vec{x})=\vec{0}$.
- en utilisant l'expression de f, déduisez-en que $\vec{x}=\vec{0}_E$.

Démonstration ▽
Commençons par observer que pour tout couple $(\vec{x}_1,\vec{x}_2) \in E^2$, on a les équivalences :

$$\begin{array}{rcl} f(x_1)=f(\vec{x}_2) & \iff & f(\vec{x}_1)-f(\vec{x}_2)=\vec{0}_F \\ & \iff & f(\vec{x}_1-\vec{x}_2)=\vec{0}_F \\ & \iff & \vec{x}_1-\vec{x}_2 \in \mathsf{Ker}\, f \end{array}$$

- montrons que la **condition est suffisante :** supposons que $\mathsf{Ker}\, f$ soit réduit à $\{\vec{0}_E\}$ et montrons que f est injective. Soient donc $(\vec{x}_1,\vec{x}_2) \in E^2$ tel que $f(\vec{x}_1)=f(\vec{x}_2)$. Alors par linéarité de f (observation précédente), il vient $\vec{x}_1-\vec{x}_2 \in \mathsf{Ker}\, f$. Comme par hypothèse $\mathsf{Ker}\, f=\{\vec{0}_E\}$, il s'ensuit que $\vec{x}_1-\vec{x}_2=\vec{0}_E$, *i.e.* $\vec{x}_1=\vec{x}_2$.
- montrons que la **condition est nécessaire :** supposons que f soit injective et montrons que $\mathsf{Ker}\, f=\{\vec{0}_E\}$.
  Comme $\mathsf{Ker}\, f$ est un sous-espace vectoriel de E, $\vec{0}_E \in \mathsf{Ker}\, f$. Il suffit donc d'établir que $\mathsf{Ker}\, f \subset \{\vec{0}_E\}$.
  Soit donc $\vec{x} \in \mathsf{Ker}\, f$. Par définition, ceci signifie que $f(\vec{x})=\vec{0}_F$. Or f étant linéaire $\vec{0}_F=f(\vec{0}_E)$. Par suite, il vient

  $$f(\vec{x})=f(\vec{0}_E)$$

  Comme f est injective, cette relation entraîne automatiquement $\vec{x}=\vec{0}_E$. ▲

Exercice : Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E vérifiant

$$f^2-3f+2Id_E=0$$

1. Montrez que f est un automorphisme de E et exprimez f^{-1} en fonction de f.

2. Montrez que $\mathsf{Ker}\,(f-2Id_E) \oplus \mathsf{Ker}\,(f-Id_E)=E$.

Solution ▽

1. *De l'identité* $2id_E=3f-f^2=(3id_E-f)\circ f$, *on tire aisément que* f *est un automorphisme de* E *d'isomorphisme réciproque* $f^{-1}=\dfrac{1}{2}(3id_E-f)$.

2. *Pour démontrer que* $\mathsf{Ker}\,(f-2Id_E)$ *et* $\mathsf{Ker}\,(f-Id_E)$ *sont supplémentaires, j'utilise la définition :*
Soit $\vec{x} \in E$, *montrons par analyse-synthèse l'existence et l'unicité d'un couple* $(\vec{u},\vec{v}) \in E^2$ *de vecteurs de* E *vérifiant les trois propriétés suivantes :*

$$(C) \quad \begin{array}{ll} \bullet & \vec{x} = \vec{u}+\vec{v} \\ \bullet & f(\vec{u}) = 2\vec{u} \\ \bullet & f(\vec{v}) = \vec{v} \end{array}$$

- **Analyse :** *soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de E vérifiant (C). Il en résulte que* $\left\| \begin{array}{rcl} \vec{x} & = & \vec{u}+\vec{v} \\ f(\vec{x}) & = & 2\vec{u}+\vec{v} \end{array} \right.$ *. D'où l'on tire aisément*

$$\left\| \begin{array}{rcl} \vec{u} & = & f(\vec{x})-\vec{x} \\ \vec{v} & = & 2\vec{x}-f(\vec{x}) \end{array} \right.$$

- **Synthèse :** *soit $(\vec{u},\vec{v})$ définis comme ci-dessus. On vérifie à l'aide de la relation polynomiale :*

$$\begin{array}{rcl} \vec{x} & = & \vec{u}+\vec{v} \\ f(\vec{u}) & = & f^2(\vec{x})-f(\vec{x})=2\vec{u} \\ f(\vec{v}) & = & 2f(\vec{x})-f^2(\vec{x})=\vec{v} \end{array}$$

- **Conclusion :** *par analyse synthèse, nous avons prouvé que tout vecteur $\vec{x}$ de E se décompose de façon unique, comme somme d'un vecteur du noyau de $f-Id_E$ et de $(f-2Id_E)$. Ces deux sous-espaces de E sont donc bien supplémentaires.* ▲

Exercice : Soient E, F et G trois $\mathbf{K}$ espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Démontrez que

1. $\mathrm{Im}\,(g\circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$
2. $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g\circ f$
3. $g\circ f = 0_{\mathcal{L}(E,G)} \iff \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$

2.c Hyperplans

Nous avons déjà rencontré la notion d'hyperplans de $\mathbf{K}^n$ comme étant l'ensemble des solutions d'une seule équation principale :

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$$

Cette notion se généralise aux cas d'un espace vectoriel quelconque de la façon suivante :

Définition : *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. On appelle **hyperplan** de E le noyau d'une forme linéaire $f \in \mathcal{L}(E,\mathbf{K})$ non nulle.*

Exemple : Soit $E=\mathbf{R}[X]$, l'ensemble $H=\{P\in E \mid P(0)=0\}$ est un hyperplan de E. En particulier c'est un sous-espace vectoriel de E.

III Image d'une base par une application linéaire

On suppose dans cette section que E est muni d'une base $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$. Comme nous l'avons exprimé au chapitre précédent, l'intéret des bases de E est de concentrer *au maximum* les informations utiles, ces propriétés se *propageant* ensuite par combinaisons linéaires.

Les résultats de toute cette partie illustrent cette idée.

1 Les images des vecteurs d'une base engendrent l'image de f

Lemme 21.14.— Soit $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ une base d'un espace vectoriel E sur $\mathbf{K}$, $f\in\mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire de E vers F et $\vec{x}\in E$ un vecteur de E.

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{si} & \vec{x} & = & x_1\cdot\vec{e}_1+x_2\cdot\vec{e}_2+\cdots+x_n\cdot\vec{e}_n \\ \textbf{alors} & f(\vec{x}) & = & x_1\cdot f(\vec{e}_1)+x_2\cdot f(\vec{e}_2)+\cdots+x_n\cdot f(\vec{e}_n) \end{array}$$

Exemple : Si $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ est l'application linéaire définie par $\forall (x,y)\in\mathbf{R}^2,\quad f(x,y)=(2x-y;x-3y;x+y)$, nous avons déjà montré que pour tout couple $(x,y)\in\mathbf{R}^2$,

$$f(x,y)=x\cdot(2;1;1)+y\cdot(-1;-3;1)$$

En pratique : Une première application pratique de ce lemme est de permettre de déterminer aisément l'image de f. C'est le sens du corollaire suivant :

Corollaire 21.15.— Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E. Alors

$$\boxed{\mathsf{Im}\, f = \mathsf{Vect}\left(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n)\right)}$$

Commentaires : en clair, les images par f des vecteurs de la base engendrent l'image de f.

Démonstration $\triangledown$
A l'aide du **Lemme** *above* et de la **caractérisation des bases**

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{Im}\, f & = & \{f(\vec{x})\,;\ \vec{x} \in E\} \\ & = & \{x_1 \cdot f(\vec{e}_1) + x_2 \cdot f(\vec{e}_2) + \cdots + x_n \cdot f(\vec{e}_n)\ ;\ (x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{K}^n)\} \end{array}$$

Ainsi, $\mathsf{Im}\, f$ apparaît comme l'ensemble des combinaisons linéaires de $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$, ..., $f(\vec{e}_n)$. C'est donc le sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs. ▲

Exercice : Soit $\Delta : \mathbf{R}_3[X] \to \mathbf{R}[X]$ l'application qui à tout polynôme P associe le polynôme :

$$\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

Déterminez $\mathsf{Im}\, \Delta$.

Solution $\triangledown$

- *Montrons que Δ est linéaire.*
  Il est clair que l'application $T : \mathbf{R}_3[X] \to \mathbf{R}[X]$ est linéaire (vérifiez-le). D'autre part, l'identité $Id_{\mathbf{R}_3[X]}$ est aussi linéaire. Par conséquent $\Delta = T - Id$ est linéaire par opérations algébriques sur de telles applications.
- *Déterminons,* $\mathsf{Im}\, \Delta$.
  D'après la proposition précédente, $\mathsf{Im}\, \Delta$ *est engendrée par les images des vecteurs de la base canonique de* $\mathbf{R}_3[X]$. *Comme par définition de* Δ

$$\begin{array}{rcl} \Delta(1) & = & 1 - 1 = 0 \\ \Delta(X) & = & (X+1) - X = 1 \\ \Delta(X^2) & = & (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1 \\ \Delta(X^3) & = & (X+1)^3 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1 \end{array}$$

j'en déduis que

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{Im}\, \Delta & = & \mathsf{Vect}_{\mathbf{R}}\{\Delta(1); \Delta(X); \Delta(X^2); \Delta(X^3)\} \\ & = & \mathsf{Vect}_{\mathbf{R}}\{0; 1; 2X+1; 3X^2+3X+1\} \\ & = & \mathsf{Vect}_{\mathbf{R}}\{1; X; X^2\} = \mathbf{R}_2[X] \end{array}$$

Ainsi, $\mathsf{Im}\, \Delta = \mathbf{R}_2[X]$. ▲

2 Une application linéaire est caractérisée par les images des vecteurs d'une base

Proposition 21.16.— Soient E, F deux espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$. On considère

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B} & = & (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n) \text{ une base de } E \\ \mathcal{F} & = & (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n) \text{ une famille de vecteurs de } F \end{array}$$

Alors, il existe une application linéaire $f : E \to F$, unique, telle que

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], \quad f(\vec{e}_i) = \vec{f}_i}$$

Retenez qu'une application linéaire est entièrement et uniquement déterminée par la donnée des images des vecteurs d'une base.

Démonstration ▽
Il s'agit d'un résultat d'existence et d'unicité. La preuve sera par *Analyse-synthèse* :

- **Analyse :** supposons qu'une telle application f existe. En ce cas, considérons un vecteur $\vec{x}$ de E décomposé suivant la base $\mathcal{B}$ sous la forme :
$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + \cdots + x_n \cdot \vec{e}_n$$
En ce cas, en utilisant consécutivement le **Lemme** précédent et l'hypothèse, il vient :
$$\begin{array}{rcl} f(\vec{x}) & = & x_1 \cdot f(\vec{e}_1) + x_2 \cdot f(\vec{e}_2) + \cdots + x_n \cdot f(\vec{e}_n) \\ & = & x_1 \cdot \vec{f}_1 + x_2 \cdot \vec{f}_2 + \cdots + x_n \cdot \vec{f}_n \end{array}$$
Ainsi, si une telle application linéaire existe elle est nécessairement définie par :
$$\forall \vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + \cdots + x_n \cdot \vec{e}_n, \quad f(\vec{x}) = x_1 \cdot \vec{f}_1 + x_2 \cdot \vec{f}_2 + \cdots + x_n \cdot \vec{f}_n$$
- **Synthèse :** Posons pour $\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + \cdots + x_n \cdot \vec{e}_n$,
$$f(\vec{x}) = x_1 \cdot \vec{f}_1 + x_2 \cdot \vec{f}_2 + \cdots + x_n \cdot \vec{f}_n$$
Il est clair que f définit bien une application de E vers F. Montrons qu'elle est linéaire :
Soit donc $\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + \cdots + x_n \cdot \vec{e}_n$ et $\vec{y} = y_1 \cdot \vec{e}_1 + y_2 \cdot \vec{e}_2 + \cdots + y_n \cdot \vec{e}_n$ deux vecteurs de E et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$ un couple de scalaires. En ce cas,
$$\begin{array}{rcl} f\big(\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y}\big) & = & f\left((\lambda x_1 + \mu y_1) \cdot \vec{e}_1 + (\lambda x_2 + \mu y_2) \cdot \vec{e}_2 + \cdots + (\lambda x_n + \mu y_n) \cdot \vec{e}_n\right) \\ & = & (\lambda x_1 + \mu y_1) \cdot \vec{f}_1 + (\lambda x_2 + \mu y_2) \cdot \vec{f}_2 + \cdots + (\lambda x_n + \mu y_n) \cdot \vec{f}_n \\ & = & \lambda \cdot \left[x_1 \cdot \vec{f}_1 + x_2 \cdot \vec{f}_2 + \cdots + x_n \cdot \vec{f}_n\right] + \mu \cdot \left[y_1 \cdot \vec{f}_1 + y_2 \cdot \vec{f}_2 + \cdots + y_n \cdot \vec{f}_n\right] \\ & = & \lambda \cdot f(\vec{x}) + \mu \cdot f(\vec{y}) \end{array}$$
Ce qui prouve que f est linéaire. ▲

3 Caractérisation des applications lineaires in/sur/bi -jectives

Proposition 21.17.— Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ une base de E.

■ f est injective	*si et seulement si*	$\big(f(\vec{e}_i)\big)_{i \in I}$ est libre dans F
■ f est surjective	*si et seulement si*	$\big(f(\vec{e}_i)\big)_{i \in I}$ est génératrice de F
■ f est un isomorphisme	*si et seulement si*	$\big(f(\vec{e}_i)\big)_{i \in I}$ est une base de F

Démonstration ▽

- Montrons que f est injective *si et seulement si* $\big(f(\vec{e}_i)\big)_{i \in I}$ est libre dans F.
Si f est injective, montrons que $\big(f(\vec{e}_i)\big)_{i \in I}$ est libre.
Soit $(\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_n})$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} \cdot f(\vec{e}_{i_k}) = \vec{0}_F$. Notons $\vec{u} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} \cdot \vec{e}_{i_k}$. D'après le **Lemme** , ceci se traduit par $f(\vec{u}) = \vec{0}_F$. Autrement dit $\vec{u} \in \mathsf{Ker}\, f$. Or f est injective par hypothèse, donc $\mathsf{Ker}\, f = \{\vec{0}_E\}$. Par conséquent,
$$\vec{0}_E = \vec{u} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} \cdot \vec{e}_{i_k}$$
Finalement, comme $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ est une base de E, nous obtenons en identifiant les coordonnées $\lambda_{i_1} = \cdots = \lambda_{i_n} = 0$.
Réciproquement, si $\big(f(\vec{e}_i)\big)_{i \in I}$ est libre, montrons que f est injective :
Soit $\vec{x} \in \mathsf{Ker}\, f$. Décomposons $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$: $\vec{x} = x_{i_1} \cdot \vec{e}_{i_1} + \cdots + x_{i_n} \cdot \vec{e}_{i_n}$. Comme $\vec{x} \in \mathsf{Ker}\, f$, il découle immédiatement du **Lemme** que
$$\vec{0}_F = \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \cdot f(\vec{e}_{i_k})$$
Il s'agit d'une C-L des $f(\vec{e}_i)$ qui donne $\vec{0}_F$. Comme par hypothèse $\big(f(\vec{e}_i)\big)_{i \in I}$ est libre, ceci n'est possible que s'il s'agit de la combinaison linéaire triviale :
$$0 = x_{i_1} = \cdots = x_{i_n}$$
Par conséquent $\vec{x} = \vec{0}_E$.

- découle directement du **Corollaire** précédent et de la caractérisation des applications linéaires surjectives.
- découle directement des deux premiers ■. ▲

IV Exemples d'applications linéaires

1 Applications linéaires de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$

Proposition 21.18.— Application linéaire canoniquement associée à une matrice
Soient $(n,p) \in \mathbf{N}^2$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice à coefficients dans $\mathbf{K}$. On définit une application linéaire $a : \mathbf{K}^p \to \mathbf{K}^n$, appelée **application linéaire canoniquement associée à** A par :

$$\forall \vec{x} = (x_1; \ldots; x_p) \in \mathbf{K}^p, \quad a(x_1, \ldots, x_p) = (y_1, \ldots, y_n)$$

où les y_k sont donnés par la relation matricielle :

$$A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Exemple : l'application linéaire $a : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est définie analytiquement par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3, \quad f(x,y,z) = \big(3x + 2y + z, -x + z\big)$$

Commentaires : en clair, si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, l'application linéaire canoniquement associée à A est l'application $a : \mathbf{K}^p \to \mathbf{K}^n$ définie par :

$$\forall \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbf{K}^p, \quad a(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \left(\sum_{j=1}^{p} a_{1,j} x_j, \sum_{j=1}^{p} a_{2,j} x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{p} a_{n,j} x_j \right)$$

Remarque : Ainsi que nous le verrons au **Chapitre 25**, toute application linéaire de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$ est de cette forme.

Démonstration ▽
Comme $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, remarquons que le produit $A \times X$ est bien défini pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{p,1}$ et $Y = A \times X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. De plus, d'après les règles de calcul matriciel, nous avons :

$$\forall (X, X') \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}),\ \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbf{K}^2, \quad A \times (\lambda \cdot X + \lambda' \cdot X') = \lambda \cdot A \times X + \lambda' \cdot A \times X'$$

Considérons à présent deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{x}'$ de $\mathbf{K}^p$ et deux scalaires λ, λ'. D'après ce qui précède, il vient :

$$A \times \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda' x'_1 \\ \lambda x_2 + \lambda' x'_2 \\ \vdots \\ \lambda x_p + \lambda' x'_p \end{pmatrix} = \lambda \cdot A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} + \lambda' \cdot A \times \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix}$$

Par construction de a, ceci revient précisément à dire que :

$$a(\lambda \cdot \vec{x} + \lambda' \cdot \vec{x}') = \lambda \cdot a(\vec{x}) + \lambda' \cdot a(\vec{x}').$$

▲

Exercice :

1. A quelle matrice l'application $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ définie ci-dessous est-elle associée ?

$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3, \quad f(x,y,z) = (2x - z; x + y + 2z; x + 2y + 3z; -x - y - 3z)$$

2. Déterminez l'application linéaire a canoniquement associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez $a(-1;0;2)$; $a(1;0;0)$, $a(0;1;0)$ et $a(0;0;1)$.

Solution ▽

1. *f est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice* $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

2. *$a : \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}^2$ est définie par*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{K}^3, \quad a(x,y,z) = \big(2x + 3y + z; 4x + 5y\big)$$

Pour calculer $a(-1;0;2)$; $a(1;0;0)$, $a(0;1;0)$ et $a(0;0;1)$, j'effectue les produits matriciels :

$$A \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix},\ A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ A \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ A \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En rangeant ces coordonnées en ligne, j'obtiens finalement :
$a(-1;0;2) = (0;-4)$, $a(1;0;0) = (2,4)$, $a(0;1;0) = (3;5)$ et $a(0;0;1) = (1;0)$. ▲

En pratique : cette notion est très utile pour démontrer qu'une application $f : \mathbf{K}^p \to \mathbf{K}^n$, dont les n composantes sont des combinaisons linéaires des p coordonnées, est linéaire. Il suffit pour cela d'exhiber la matrice à laquelle f est canoniquement associée.

Exemple : pour justifier que l'application $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^3$ définie par

$$\forall (z_1,z_2) \in \mathbf{C}^2, \quad f(z_1,z_2) = (2iz_1 - 3z_2, z_1 + (1+i)z_2, z_1 - z_2)$$

est $\mathbf{C}$-linéaire, vous pouvez remarquer que f est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbf{C})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 2i & -3 \\ 1 & 1+i \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Proposition 21.19.— Soit $a \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$, l'application linéaire canoniquement associée à une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Alors

- $\mathsf{Ker}\, a$ est l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires homogène représenté par l'équation matricielle : $A \times X = 0$
- $\mathsf{Im}\, a$ est le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de A.

Démonstration ▽

- Soit $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbf{K}^p$. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$. Par définition de l'application linéaire canoniquement associée à A, nous avons

$$\vec{x} \in \mathsf{Ker}\, a \iff a(\vec{x}) = \vec{0} \iff A \times X = 0.$$

- D'après la **Proposition** 21.15, $\mathsf{Im}\, a$ est engendré par les images des vecteurs de la base canonique : $a(\vec{e}_1), \ldots, a(\vec{e}_p)$. Calculons $a(\vec{e}_1), \ldots, a(\vec{e}_p)$. Pour cela, par définition de l'application linéaire canoniquement associée à une matrice, nous devons effectuer les produits $A \times E_1$, $A \times E_2$,…$A \times E_n$, où les matrices colonnes E_1, E_2, …E_p sont données par :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad , E_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un calcul élémentaire montre que $A \times E_k$ n'est autre que la $k^{\text{ième}}$ colonne de A. ▲

2 Dérivation des polynômes

Soit $\mathbf{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$ d'indéterminée X. On considère la dérivation dans $\mathbf{K}[X]$ qui à tout polynôme P associe son polynôme dérivé P' :

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & \mathbf{K}[X] & \to & \mathbf{K}[X] \\ & P & \mapsto & P' \end{array}$$

Rappelons que si $P \in \mathbf{K}[X]$ est donné par $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, son polynôme dérivé est

$$P' = \sum_{k=0}^{n} k\ a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\ a_{k+1}\ X^k$$

Proposition 21.20.— L'application Δ est un endomorphisme de $\mathbf{K}[X]$. De plus

- $\mathsf{Im}\,\Delta = \mathbf{K}[X]$
- $\mathsf{Ker}\,\Delta = \mathbf{K}_0[X]$

Remarque : En particulier, Δ est surjective mais non injective.

Démonstration ▽

- Soit $Q \in \mathbf{K}[X]$. Montrons que $Q \in \mathsf{Im}\,\Delta$.

  Supposons que $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et posons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \dfrac{X^{k+1}}{k+1}$. $P \in \mathbf{K}[X]$ est bien défini et vérifie $\Delta P = Q$. Par conséquent, $\mathsf{Im}\,\Delta = \mathbf{K}[X]$.
- L'ensemble $\mathbf{K}_0[X]$ des polynômes constants est contenu dans le noyau de Δ. Réciproquement, montrons par contraposée que si $P \in \mathsf{Ker}\,\Delta$, alors P est de degré inférieur ou égal à 0. En effet, si $d^\circ P > 0$, *i.e.* P est non constant, alors, d'après la **Proposition** 15.16, ΔP est de degré positif ou nul. En particulier, ΔP n'est pas nul, *i.e.* $P \notin \mathsf{Ker}\,\Delta$. ▲

3 Intégrale des fonctions continues

Soit $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$. On considère l'application I qui à toute fonction continue $f \in E$, associe son intégrale $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Proposition 21.21.— L'application $I : \mathcal{C}([a,b], \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbf{R})$.

4 Projecteurs et projections

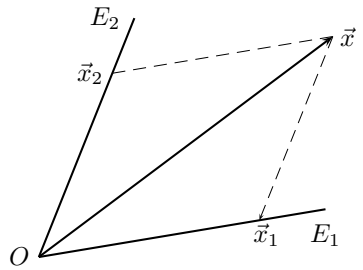
4.a Projections

Définition : *Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E, de sorte que tout vecteur $\vec{x}$ de E s'écrit de manière unique :*

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \quad \text{où } (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_2$$

*On appelle **projection de E sur E_1 parallèlement à E_2**, l'application notée p_{E_1} définie par :*

$$\begin{array}{rccc} p_{E_1} : & E & \to & E \\ & \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 & \mapsto & \vec{x}_1 \end{array}$$



Exemple : Comme nous l'avons déjà vu $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = \mathcal{A}_n(\mathbf{K}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbf{K})$. La projection sur $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ s'écrit :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \quad p_{\mathcal{S}_n}(A) = \frac{1}{2}(A + {}^t A)$$

Exercice : Soit E_1 et E_2 les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$ engendrés respectivement par $\vec{e}_1 = (1,0)$ et $\vec{e}_2 = (2,1)$.

1. Vérifiez que $\mathbf{R}^2 = E_1 \oplus E_2$.

2. On note p_{E_1} la projection sur E_1 parallèlement à E_2. Explicitez $p(x,y)$ pour tout vecteur $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Solution ▽

1. *Pour démontrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires, j'utilise la définition :*
Etant donné $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, il s'agit de prouver qu'il existe un unique couple $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$(x,y) = \lambda \cdot \vec{e}_1 + \mu \cdot \vec{e}_2.$$

Traduisons cette équation vectorielle en un système d'équations linéaires d'inconnues (λ,μ), il vient :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda & +2\mu = x \\ & \mu = y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda = x - 2y \\ \mu = \quad y \end{array} \right.$$

Ainsi, le couple $(x-2y;y)$ est l'unique couple vérifiant

$$(x,y) = (x-2y) \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2.$$

2. *Il suffit de lire dans la décomposition ci-dessus, la composante suivant E_1. Il en résulte que p_{E_1} est définie par*

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad p_{E_1}(x,y) = (x-2y) \cdot \vec{e}_1 = (x-2y, 0).$$

▲

Proposition 21.22.— La projection p_{E_1} de E sur E_1 parallèlement à E_2 est un endomorphisme de E vérifiant :

- $\mathsf{Im}\, p_{E_1} = \mathsf{Ker}\,(p_{E_1} - id_E) = E_1$
- $\mathsf{Ker}\, p_{E_1} = E_2$
- $p_{E_1} \circ p_{E_1} = p_{E_1}$

Commentaires : les conclusions de cette proposition se visualisent très bien sur le schéma de la page précédente. En particulier, E_1 est l'ensemble des images de la projection sur E_1. C'est aussi l'ensemble des vecteurs invariants par p_{E_1}, soit le noyau de $p_{E_1} - id_E$.

Démonstration ▽
Afin d'alléger l'écriture, convenons de noter p_1 *instead of* p_{E_1}.
Montrons que p_1 est linéaire : soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de E qui se décomposent de façon unique dans $E_1 \oplus E_2$ sous la forme

$$\begin{array}{r|l} \lambda\times & \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \\ \mu\times & \vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 \end{array},$$

où $\vec{x}_i, \vec{y}_i \in E_i$ pour $i = 1,2$.
Considérons $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$ un couple de scalaires. Alors

$$\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} = \underbrace{\lambda \cdot \vec{x}_1 + \mu \cdot \vec{y}_1}_{\in E_1} + \underbrace{\lambda \cdot \vec{x}_2 + \mu \cdot \vec{y}_2}_{\in E_2}$$

Par unicité de la décomposition d'un vecteur comme somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2, il en résulte que

$$p_1(\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x}_1 + \mu \cdot \vec{y}_1 = \lambda \cdot p_1(\vec{x}) + \mu \cdot p_1(\vec{y}),$$

ce qui prouve que p_1 est linéaire.

A présent, montrons les trois assertions :

- Il est clair que $\mathsf{Im}\, p_1 \subset E_1$.
- Montrons que $E_1 \subset \mathsf{Ker}\,(p_1 - id_E)$. Il s'agit de vérifier que les vectuers de E_1 sont invariants par p_1.
  Soit $\vec{x}_1 \in E_1$, sa décomposition comme somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2 est :

  $$\vec{x}_1 = \vec{x}_1 + \vec{0}_{E_2}$$

  Par suite $\vec{x}_1 = p_1(\vec{x}_1)$, soit encore $p_1(\vec{x}_1) - id_E(\vec{x}_1) = \vec{0}_E$.
  Ceci étant vrai pour tout $\vec{x}_1 \in E_1$, on a $E_1 \subset \mathsf{Ker}\,(p_1 - id_E)$.

- Montrons que $\mathsf{Ker}\,(p_1) - id_E \subset \mathsf{Im}\,p_1$.
  Soit $\vec{x} \in \mathsf{Ker}\,(p_1) - id_E$. En ce cas, $\vec{x} = p_1(\vec{x})$. En particulier, $\vec{x} \in \mathsf{Im}\,p_1$.

■ soit $\vec{x} \in E$, décomposons $\vec{x}$ sous la forme d'une somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} \vec{x} \in \mathsf{Ker}\,p_1 & \iff & p_1(\vec{x}) = \vec{0} \\ & \iff & \vec{x}_1 = \vec{0} \\ & \iff & \vec{x} = \vec{x}_2 \\ & \iff & \vec{x} \in E_2. \end{array}$$

■ soit $\vec{x} \in E$ et $\vec{x}_1 = p_1(\vec{x})$. Alors $p_1 \circ p_1(\vec{x}) = p_1(\vec{x}_1) = \vec{x}_1 = p_1(\vec{x})$. ▲

4.b Projecteurs

En fait, la dernière assertion de cette proposition suffit à caractériser les projections parmi les endomorphismes de E. Plus précisément :

Définition : *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Un endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ est appelé un* ***projecteur*** *s'il vérifie l'équation polynomiale :*

$$\boxed{p^2 = p}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall \vec{x} \in E, \quad p \circ p\,(\vec{x}) = p(\vec{x})}$$

Théorème 21.23.— Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur, alors

- $\mathsf{Ker}\,p$ et $\mathsf{Im}\,p$ sont supplémentaires, *i.e.* $E = \mathsf{Ker}\,p \oplus \mathsf{Im}\,p$
- p est la projection de E sur $\mathsf{Im}\,p$ parallèlement à $\mathsf{Ker}\,p$.

En pratique : lorsqu'on vous demande de déterminer les éléments caractéristiques d'un projecteur, il s'agit de $\mathsf{Ker}\,p$ et $\mathsf{Im}\,p$.

- $\mathsf{Ker}\,p$ est l'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène $p(\vec{x}) = \vec{0}$.
- $\mathsf{Im}\,p$ est l'ensemble des vecteurs invariants par p. Ce sont donc les solutions de l'équation linéaire homogène $p(\vec{x}) = \vec{x}$.

Démonstration ▽

■ Montrons que $E = \mathsf{Ker}\,p \oplus \mathsf{Im}\,p$.
Soit $\vec{x} \in E$, montrons par *analyse-synthèse* qu'il existe un couple $(\vec{u}, \vec{v})$, unique tel que

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \bullet \ \vec{x} & = & \vec{u} + \vec{v} \\ \bullet \ \vec{u} & \in & \mathsf{Ker}\,p \\ \bullet \ \vec{v} & \in & \mathsf{Im}\,p \end{array} \right.$$

► **Analyse :** supposons qu'un tel couple $(\vec{u}, \vec{v})$ existe. Comme $\vec{u} \in \mathsf{Ker}\,p$, et $\vec{v} \in \mathsf{Im}\,p$, on a $p(\vec{v}) = \vec{0}$ et $\vec{v} = p(\vec{w})$, où $\vec{w} \in E$. En utilisant le fait que p est un projecteur, il vient alors :

$$p(\vec{x}) = p(\vec{u}) + p(\vec{v}) = \vec{0} + p^2(\vec{w}) = p(\vec{w}) = \vec{v}$$

Ainsi, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient $\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{x} & = & \vec{u} + \vec{v} \\ p(\vec{x}) & = & \vec{v} \end{array} \right.$. Il en découle immédiatement que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{u} & = & \vec{x} - p(\vec{x}) \\ \vec{v} & = & p(\vec{x}) \end{array} \right.$$

► **Synthèse :** vérifions que le couple $(\vec{u},\vec{v})$ ainsi construit convient :

- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{x}$
- $p(\vec{u})=p(\vec{x})-p^2(\vec{x})=\vec{0}$
- $\vec{v}=p(\vec{x})\in \mathsf{Im}\, p$

► **Conclusion :** par analyse-synthèse, on a bien montré que

$$E=\mathsf{Ker}\, p\oplus \mathsf{Im}\, p$$

■ D'après le premier point tout vecteur $\vec{x}$ de E se décompose de manière unique sous la forme

$$\vec{x}=\underbrace{p(\vec{x})}_{\in \mathsf{Im}\, p}+\underbrace{\vec{x}-p(\vec{x})}_{\in \mathsf{Ker}\, p}$$

Convenons de noter $\tilde{p}$ la projection de E sur $\mathsf{Im}\, p$ parallèlement à $\mathsf{Ker}\, p$. D'après l'égalité ci-dessus, j'en déduis que pour tout vecteur $\vec{x}$ de E, $\tilde{p}(\vec{x})=p(\vec{x})$, *i.e.* $p=\tilde{p}$ est la projection de E sur $\mathsf{Im}\, p$ parallèlement à $\mathsf{Ker}\, p$. ▲

Exercice : Soit $p:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ l'application définie par

$$\forall (x,y)\in\mathbf{R}^2,\quad p(x,y)=(4x-6y,2x-3y)$$

1. Montrez que p est linéaire.

2. Calculez $p\circ p$. En déduire que p est un projecteur.

3. Déterminez une base de $\mathsf{Ker}\, p$ et de $\mathsf{Im}\, p$.

Solution ▽

1. *p est l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $A=\begin{pmatrix}4&-6\\2&-3\end{pmatrix}$. Donc p est linéaire.*

2. *Soit $(x,y)\in\mathbf{R}^2$. Alors*

$$\begin{aligned} p\circ p(x,y) &= \Big(4(4x-6y)-6(2x-3y);2(4x-6y)-3(2x-3y)\Big)\\ &= (4x-6y;2x-3y)=p(x,y)\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $p\circ p(x,y)=p(x,y)$, i.e. $p\circ p=p$. Donc p est un projecteur.

3. • *Soit (x,y) de $\mathbf{R}^2$,*

$$(x,y)\in\mathsf{Ker}\, p \iff p(x,y)=0 \iff 2x-3y=0.$$

Ainsi, une base de $\mathsf{Ker}\, p$ est donnée par $\vec{u}_2=(3;2)$.

• *Je sais que $\mathsf{Im}\, p$ est engendrée par les images des vecteurs de la base canonique, dont les coordonnées sont les colonnes de A. Par suite,*

$$\mathsf{Im}\, p=\mathsf{Vect}_{\mathbf{R}}\{(4,2);(-6,-3)\}$$

Comme ces deux vecteurs sont clairement colinéaires au vecteur $\vec{u}_1=(2,1)$, il en résulte qu'une base de $\mathsf{Im}\, p$ est donnée par $\vec{u}_1$.

Conclusion : *p est la projection de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathsf{Vect}\,(\vec{u}_1)$ parallèlement à $\mathsf{Vect}\,(\vec{u}_2)$.* ▲

5 Involutions et symétries

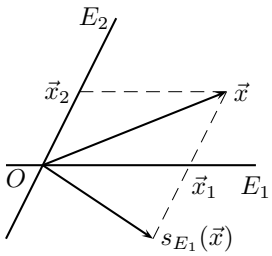
5.a Symétries

Définition : *Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E, de sorte que tout vecteur $\vec{x}$ de E s'écrit de manière unique :*

$$\vec{x}=\vec{x}_1+\vec{x}_2,\quad \text{où } (\vec{x}_1,\vec{x}_2)\in E_1\times E_2$$

On appelle ***symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2****, l'application notée s_{E_1} définie par :*

$$\begin{array}{rccc} s_{E_1}: & E & \to & E\\ & \vec{x}=\vec{x}_1+\vec{x}_2 & \mapsto & \vec{x}_1-\vec{x}_2\end{array}$$



Proposition 21.24.— La symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 est un endomorphisme de E vérifiant :

- $s_{E_1} = 2p_{E_1} - Id_E$
- $s_{E_1} \circ s_{E_1} = Id_E$
- s_{E_1} est un automorphisme de E et $s_{E_1}^{-1} = s_{E_1}$.

Démonstration ▽

- Soit $\vec{x} \in E$ un vecteur de E qui se décompose dans $E = E_1 \oplus E_2$ sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, où $\vec{x}_1 = p_{E_1}(\vec{x})$. Alors
$$\big(2p_{E_1} - Id_E\big)(\vec{x}) = 2\vec{x}_1 - (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = s_{E_1}(\vec{x})$$
Ainsi, nous avons vérifié que $s_{E_1} = 2p_{E_1} - Id_E$.
- Comme $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel, s_{E_1} est un endomorphisme de E comme combinaison linéaire d'endomorphismes. De plus, comme id_E et $2p_{E_1}$ commutent, la **formule du binôme** dans $\mathcal{L}(E)$ donne :
$$\begin{array}{rcl} s_{E_1}^2 & = & (2p_{E_1} - id_E)^2 \\ & = & 4p_{E_1}^2 - 4p_{E_1} + id_E \\ & = & id_E \end{array}$$
- Finalement , de la relation $s_{E_1} \circ s_{E_1} = Id_E$, je tire (cf **Théorème** 6.16) que s_{E_1} est bijective et que $s_{E_1}^{-1} = s_{E_1}$. ▲

5.b Endomorphismes involutifs

En fait, la deuxième assertion de cette proposition suffit à caractériser les symétries parmi les endomorphismes de E. Plus précisément :

Définition : *Soit E un* **K***-espace vectoriel. Un endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ est appelé une* ***involution*** *s'il vérifie l'équation polynomiale :*

$$\boxed{s^2 = Id_E}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall \vec{x} \in E, \quad s \circ s\,(\vec{x}) = \vec{x}}$$

Théorème 21.25.— Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une involution, alors

- $\mathsf{Ker}\,(s - Id_E)$ et $\mathsf{Ker}\,(s + Id_E)$ sont supplémentaires :
$$E = \mathsf{Ker}\,(s - Id_E) \oplus \mathsf{Ker}\,(s + Id_E)$$
- s est la symétrie par rapport à $\mathsf{Ker}\,(s - Id_E)$ parallèlement à $\mathsf{Ker}\,(s + Id_E)$.

Démonstration ▽

- Montrons que $E = \mathsf{Ker}\,(s - id_E) \oplus \mathsf{Ker}\,(s + id_E)$. La preuve sera par *analyse-synthèse*. Soit $\vec{x} \in E$. Montrons qu'il existe un couple $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, unique tel que :
$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \bullet \quad \vec{x} & = & \vec{u} + \vec{v} \\ \bullet \quad \vec{u} & \in & \mathsf{Ker}\,(s - id_E) \\ \bullet \quad \vec{v} & \in & \mathsf{Ker}\,(s + id_E) \end{array} \right.$$
  - ▸ **Analyse :** supposons qu'un tel couple $(\vec{u}, \vec{v})$ existe. En ce cas, comme $s(\vec{u}) = \vec{u}$ et $s(\vec{v}) = -\vec{v}$, il vient :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{x} & = & \vec{u} + \vec{v} \\ s(\vec{x}) & = & \vec{u} - \vec{v} \end{array} \right.$$
Il en découle aisément que
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{u} & = & \frac{1}{2}\big[\vec{x} + s(\vec{x})\big] \\ \vec{v} & = & \frac{1}{2}\big[\vec{x} - s(\vec{x})\big] \end{array} \right.$$

▸ **Synthèse :** Vérifions que le couple $(\vec{u},\vec{v})$ vérifie (C) :

- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{x}$
- $s(\vec{u})=\frac{1}{2}\big[s(\vec{x})+s^2(\vec{x})\big]=\frac{1}{2}\big[s(\vec{x})+\vec{x}\big]=\vec{u}$
- $s(\vec{v})=\frac{1}{2}\big[s(\vec{x})-s^2(\vec{x})\big]=\frac{1}{2}\big[s(\vec{x})-\vec{x}\big]=-\vec{v}$

▸ **Conclusion :** par analyse-synthèse, on a prouvé que

$$E=\mathsf{Ker}\,(s-id_E)\oplus\mathsf{Ker}\,(s+id_E)$$

■ Afin d'alléger l'écriture, notons p_1 la projection de E sur $E_1=\mathsf{Ker}\,(s-Id_E)$ parallèlement à $E_2=\mathsf{Ker}\,(s+Id_E)$. D'après ce qui précède

$$\forall\vec{x}\in E,\quad \vec{x}=\underbrace{\frac{1}{2}(s+id_E)(\vec{x})}_{\in\mathsf{Ker}\,(s-id_E)}+\underbrace{\frac{1}{2}(id_E-s)(\vec{x})}_{\in\mathsf{Ker}\,(s+id_E)}$$

Par unicité de la décomposition, il s'ensuit que $p_1=\frac{1}{2}(s+id_E)$. Finalement, d'après la **Proposition** 21.24, il en résulte que $s=2p_1-id_E$ est la symétrie de E par rapport à E_1, parallèlement à E_2. ▲

Exercice : Soit $\tau:\mathcal{M}_n(\mathbf{K})\to\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ l'application qui à toute matrice associe sa transposée.

1. Montrez que τ est linéaire.

2. Montrez que τ est une symétrie.

3. Précisez ses éléments caractéristiques.

6 Affinités vectorielles

Définition : *Soient $\alpha\in\mathbf{K}$ un scalaire, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E, de sorte que tout vecteur $\vec{x}$ de E s'écrit de manière unique :*

$$\vec{x}=\vec{x}_1+\vec{x}_2,\quad \text{où } (\vec{x}_1,\vec{x}_2)\in E_1\times E_2$$

*On appelle **affinité par rapport à E_1 parallèlement à E_2 et de rapport** α, l'application f définie par :*

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \to & E \\ & \vec{x}=\vec{x}_1+\vec{x}_2 & \mapsto & \vec{x}_1+\alpha\cdot\vec{x}_2 \end{array}$$

Exemples :

- si $\alpha=1$ f est l'identité,
- si $\alpha=-1$, f est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2,
- si $\alpha=0$, f est la projection su E_1 parallèment à E_2.

Proposition 21.26.— L'affinité vectorielle f par rapport à E_1, parallèlement à E_2 et de rapport α est un endomorphisme de E.

Démonstration ▽

Notons p (resp. q) la projection vectorielle sur E_1 parallèlement à E_2 (resp. sur E_2 parallèlement à E_1). Alors $f=p+\alpha\cdot q$ est un endomorphisme de E comme combinaison linéaire de telles applications. ▲

V How To

Applications linéaires

Comment démontrer qu'une application est linéaire

Soit $f : E \to F$ une application entre deux espaces vectoriels sur un même corps de scalaires $\mathbf{K}$. Si $f(\vec{0}_E) \neq \vec{0}_F$, ***Ne cherchez plus !*** f n'est pas linéaire. Sinon :

- Vous connaissez déjà quelques exemples célèbres d'applications linéaires :
  1. les applications linéaires de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$ sont des n-uplets de *polynômes homogènes de degré 1* ou **applications linéaires canoniquement associées à une matrice** $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
  2. La dérivation des polynômes dans $\mathbf{K}[X]$ est un endomorphisme surjectif.
  3. Les projections et symétries sont des exemples très importants d'endomorphismes
- L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires est un espace vectoriel, de sorte que toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.
- Vous vérifiez que f préserve les combinaisons linéaires : il s'agit de prouver pour tout couple $(\vec{x}, \vec{y})$ de vecteurs et tout couple (λ, μ) de scalaires que :

$$\boxed{f(\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y}) = \lambda \cdot f(\vec{x}) + \mu \cdot f(\vec{y})}$$

  C'est la méthode la plus courante. Elle est souvent très simple à mettre en œuvre.

Comment déterminer le noyau d'une application linéaire

- Si f est canoniquement associée à la matrice A, $\mathsf{Ker}\, f$ est l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires :
$$A \times X = 0$$
- Plus généralement, un vecteur $\vec{x} \in E$ appartient à $\mathsf{Ker}\, f$ *si et seulement si* $\vec{x}$ est solution de l'*équation vectorielle* :
$$f(\vec{x}) = \vec{0}_F$$
  Traduisez cette équation en coordonnées. Vous obtenez 8 fois sur 10 un *système d'équations linéaires* homogène que vous résolvez grâce à l'algorithme de Gauss.

Comment déterminer l'image d'une application linéaire

- La méthode la plus directe consiste à se rappeler que l'image de f est engendrée par les images d'une base[4] de E.
- Si f est canoniquement associée à la matrice A, $\mathsf{Im}\, f$ est engendrée par les colonnes de A.
- Par définition un vecteur $\vec{y} \in F$ est élément de l'image de f *si et seulement si il existe* $\vec{x} \in E$ solution de l'*équation vectorielle* :
$$f(\vec{x}) = \vec{y}$$
  Traduisez cette équation en coordonnées pour obtenir un *système d'équations linéaires*. Le vecteur $\vec{y}$ est dans l'image pourvu que le système obtenu soit compatible. C'est le cas lorsque toutes les équations auxiliaires sont vérifiées.

Comment démontrer qu'une application linéaire est surjective

- Vous démontrez que $\mathsf{Im}\, f = F$
  Il s'agit d'une égalité ensembliste entre sous-espaces vectoriels. Vous pouvez la démontrer
  1. par double-inclusion ($F \subset \mathsf{Im}\, f$ suffit puisque l'autre inclusion est évidente)
  2. en utilisant des résultats sur les sous-espaces vectoriels. Par exemple, il suffit de prouver que $\mathsf{Im}\, f$ contient une famille génératrice de F.
- Nous verrons d'autres stratégies dans les chapitres à venir ...

[4] en fait une famille génératrice suffit, cf **Proposition** 21.15

Comment démontrer qu'une application linéaire est injective

- Vous démontrez que $\mathsf{Ker}\, f = \{\vec{0}_E\}$
  Pour cela, il suffit de démontrer que $\mathsf{Ker}\, f \subset \{\vec{0}_E\}$:

$$\textit{Soit } \vec{x} \in E, \textit{ tel que } f(\vec{x}) = \vec{0}_F{}^{5}. \textit{ Montrez que } \vec{x} = \vec{0}_E.$$

- Nous verrons d'autres stratégies dans les chapitres à venir ...

Comment démontrer qu'une application linéaire est un isomorphisme

- Vous démontrez qu'elle est à la fois injective et surjective comme ci-dessus.
- Vous trouvez un inverse (à gauche et à droite!!!) (**exemple :** s_{E_1} est un automorphisme de E.)
- Vous utilisez une relation polynomiale, pour prouver que f est un automorphisme.
- Vous utilisez la caractérisation par les bases (**Théorème** 21.17)
- Nous verrons d'autres stratégies dans les chapitres à venir ...

Sous-espaces vectoriels

Comment démontrer qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel

Aux méthodes vues au chapitre précédent, viennent s'ajouter deux nouvelles tactiques utilisant le noyau et l'image d'une application linéaire :

Soient E, F des espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire de E dans F.

- **Point de vue équations**
  Si $A \subset E$ est défini par une équation linéaire **homogène**

$$A = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \vec{0}_F\}$$

  Alors $A = \mathsf{Ker}\, f$ est un sous-espace vectoriel de E.
- **Point de vue paramètrage**
  Si $A \subset F$ est défini par un paramétrage linéaire

$$A = \{f(\vec{x})\,;\ \vec{x} \in E\} = \{\vec{y} \in F \mid \exists \vec{x} \in E;\ \vec{y} = f(\vec{x})\}$$

  Alors $A = \mathsf{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de F.

[5] i.e. $\vec{x} \in \mathsf{Ker}\, f$