Chapitre 11

Dérivation

Sommaire

I Dérivabilité 261
1 Fonction dérivable en un point 261
2 Fonction dérivée 265
3 Opérations sur les fonctions dérivables 265
4 Fonctions dérivées des fonctions usuelles 268
II Dérivées d'ordre supérieur 269
1 Définition, exemples 269
2 Opérations sur les fonctions n-fois dérivables 270
3 Extension aux fonctions à valeurs complexes 273
III Théorèmes fondamentaux 273
1 Extremums locaux d'une fonction dérivable 273
2 Théorème de Rolle 275
3 Théorèmes des accroissements finis 275
4 Fonctions monotones dérivables 278
5 Dérivabilité aux bornes de l'intervalle 280

OBJECTIFS

À la fin du chapitre vous devez savoir

- ▷ calculer les dérivées $n^{\text{ièmes}}$
- ▷ obtenir rapidement une inégalité entre fonctions en étudiant la différence ou en utilisant les inégalités des accroissements finis.

Introduction

La continuité d'une fonction en un point a de son intervalle de définition traduit analytiquement le fait qu'au voisinage de a la fonction f est voisine de la fonction *constante* égale à a. Cette approximation assez grossière, ne prend absolument pas en compte les *variations* de f. C'est la raison pour laquelle nous introduisons les quantités suivantes :
On appelle **accroissement** de f entre a et x le nombre $\Delta f(a,x) = f(x) - f(a)$, le **taux de variation** ou **taux d'accroissement** de la fonction entre a et x étant donné par

$$\frac{\Delta f(a,x)}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{accroissement\ de\ f}{accroissement\ en\ x}$$

Par exemple, il est intéressant de noter que les fonctions affines sont caractérisées par le fait que leur taux de variation sont constants.

Lorsque ces taux d'accroissement possèdent une limite finie quand x tend vers a, nous obtenons un **taux d'accroissement infinitésimal**

$$\frac{df}{dx}(a) = \lim_{x\to a} \frac{\Delta f(a,x)}{\Delta x}.$$

Ce taux d'accroissement infinitésimal est appelé la **dérivée** de f en a, on la note $\frac{df}{dx}(a)$ ou $f'(a)$.

Comme nous le prouverons, l'existence de cette limite revient à pouvoir approcher f au voisinage de a par la fonction affine $x \mapsto f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$, ce qui se traduit géométriquement par le fait que la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$$

est tangente à la courbe représentative Γ_f de f au point a.

Ainsi, l'étude des taux de variations d'une fonction permet de calculer sa dérivée. Inversement –et c'est là tout l'intérêt– l'étude de la dérivée d'une fonction f permet d'obtenir des informations sur les variations de f. Il s'agit *essentiellement* de :

— préciser sa monotonie,

— majorer les accroissements finis [1] de f.

1. par opposition aux accroissements infinitésimaux évoqués plus haut

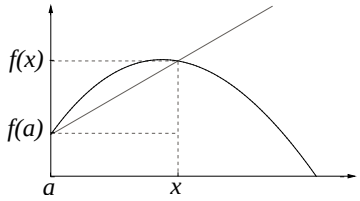
I Dérivabilité

1 Fonction dérivable en un point

1.a Taux de variation

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur I et $a \in I$. On appelle* ***taux de variation*** *au point a la fonction :*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_a : & I \setminus \{a\} & \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$



1.b Nombre dérivée de f en a

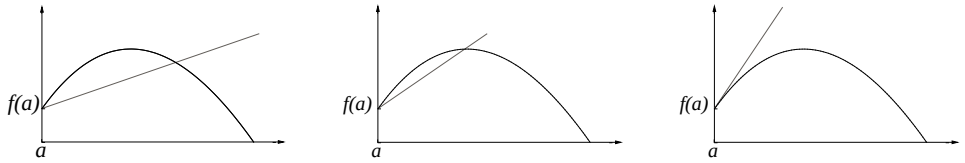
Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur I et $a \in I$. On dit que f est* ***dérivable*** *au point a lorsque les taux de variation de f au point a possèdent une limite finie au point a. En ce cas, on note*

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \xrightarrow{\neq} a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}.$$

$f'(a)$ est alors appelée le ***nombre dérivé*** *de f en a.*

Commentaires : $\varphi_a(x)$ est la pente de la corde d'extrémités $A(a, f(a))$ et $X(x, f(x))$. Le nombre dérivé de f correspond donc à la *pente limite*.

Illustration : **La dérivée est la limite des taux de variation**



Exemple : soit f la fonction affine définie par $x \mapsto d \cdot x + c$. Les taux de variations de f sont constants et égaux à d. Par conséquent, f est dérivable en tout point a de $\mathbf{R}$ et son nombre dérivé est égal à d.
En particulier, une fonction constante est dérivable en tout point de son intervalle de définition, et sa dérivée vaut 0.

Interprétation cinématique :

Imaginons qu'un point mobile se déplace en trajectoire rectiligne et que $f(t)$ représente son abscisse à l'instant t. En ce cas, le taux de variation $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ apparaît comme la **vitesse moyenne** du mobile entre les instants a et t, tandis que le nombre dérivé $f'(a)$ représente la **vitesse instantanée** à l'instant a.

En pratique : Pour l'étude de la dérivabilité d'une fonction f au point a, il est souvent utile de se ramener à une étude de limite en 0 au moyen du changement de variable $x = a + h$. Ainsi, f est dérivable au point a *si et seulement si* les rapports $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tendent vers une limite finie lorsque h tend vers 0. En ce cas

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \xrightarrow{\neq} 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Exemple : La fonction racine carrée $\sqrt{\cdot} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ est dérivable en tout point $a \in \mathbf{R}^{+\star}$ mais elle n'est pas dérivable en 0. En effet,

$$\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{(a+h)-a}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} \text{ et } \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

Il en résulte que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ et $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\sqrt{h}}{h} = +\infty$.

1.c Dérivée à gauche, à droite

La fonction φ_a n'est pas définie au point a. Rappelons que par définition, on dit que φ_a admet une limite au point a si elle admet des limites à gauche et à droite qui coïncident. Ceci conduit à adopter la définition suivante :

Définition : *Soit $a \in I$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction. On dit que :*

- *f est **dérivable à gauche** au point a si φ_a admet une limite finie à gauche au point a. En ce cas, on note*
$$f'_g(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
- *f est **dérivable à droite** au point a si φ_a admet une limite finie à droite au point a. En ce cas, on note*
$$f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

On en déduit immédiatement :

Proposition 11.1.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur I et $a \in I$.

f est dérivable au point a
si et seulement si
f est dérivable à gauche et à droite au point a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

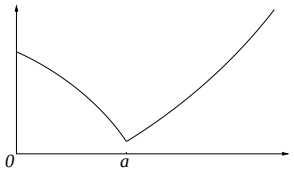
En ce cas $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Remarque : si a est une extrémité de I, alors une seule des deux conditions ci-dessus n'a de sens.

Exemple : la fonction $|\cdot| : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ qui à tout réel x associe sa valeur absolue est dérivable à gauche et à droite en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0 car ses dérivées à gauche et à droite ne coïncident pas.

Vocabulaire : *lorsque f est dérivable à gauche et à droite au point a, mais que $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, on dit que le graphe de f présente un **point anguleux** au point a.*
*Lorsque f est dérivable au point a, le graphe de f n'a pas de point anguleux au point a, on dit qu'il est **lisse**.*

Illustration : Le graphe de f possède un point anguleux



Exercice : Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$. Montrez que f est dérivable en 0.

1.d Caractérisation à l'aide d'un développement limité

Théorème 11.2.— Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

f est dérivable au point a
si et seulement si
il existe $d \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) = f(a) + d \cdot (x-a) + o_a(x-a)$

En ce cas, $f'(a) = d$.

Vocabulaire : *la fonction $x \mapsto f(a) + d \cdot (x-a) + o_a(x-a)$ s'appelle un* ***développement limité à l'ordre 1*** *de f en a.*

En pratique : on effectue le changement de variable $x = a+h$ afin de se ramener au voisinage de 0. On obtient alors :

$$\text{s'il existe } d \in \mathbf{R} \text{ tel que } f(a+h) = f(a) + d\,h + o_0(h), \text{ alors } f \text{ est dérivable en } a \text{ et } f'(a) = d.$$

Démonstration ▽
Si f est dérivable au point a, alors dans un voisinage de 0, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) = o(1)$. Multiplions les deux membres de cette égalité par h, nous obtenons

$$f(a+h) - f(a) - h\ f'(a) = h\ o(1) = o(h).$$

Réciproquement, supposons que f admette un développement limité d'ordre 1 au point a. En posant $x = a+h$, nous en déduisons $f(a+h) = f(a) + d \cdot h + o(h)$. Ainsi

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - d = \frac{o(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0,$$

ce qui prouve que f est dérivable en a et que $f'(a) = d$. ▲

Exercice : Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et notons $p_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad p_n(x) = x^n$$

1. Utilisez la **formule du binôme** de Newton pour développer $(a+h)^n - a^n$.

2. Repérez dans le développement ci-dessus la *partie linéaire en h*. Déduisez-en grâce au **Théorème** 11.2 que p_n est dérivable en $a \in \mathbf{R}$ et que $p_n'(a) = n\,a^{n-1}$.

Solution ▽
D'après la formule du binôme, il vient

$$(a+h)^n \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\,h^k = a^n + n\,a^{n-1}\,h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\,h^k = a^n + n\,a^{n-1}\,h + o_0(h)$$

Autrement dit, au voisinage de a, p_n admet pour développement limité à l'ordre 1 :

$$x^n = a^n + n\,a^{n-1}\,(x-a) + o_a(x-a)$$

D'après le **Théorème** *11.2, ceci prouve que p_n est dérivable au point a et que $p_n'(a) = n\,a^{n-1}$.* ▲

Inversement la dérivabilité peut être utilisée pour obtenir un équivalent. C'est le **Corollaire** suivant, déjà énoncé au **Chapitre 9** :

Corollaire 11.3.— Soit $f \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R})$ une fonction et $a \in I$.

Si f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$, **alors** $f(a+h) - f(a) \sim_0 f'(a)\,h$.

Démonstration ▽
Il suffit d'utiliser la caractérisation de l'équivalence des fonctions avec les o

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)\ h + o(h)$$

Comme par hypothèse $f'(a) \neq 0$, j'en déduis que $o(h) = o\big(f'(a).h\big)$. On peut alors conclure avec le **Théorème** 9.13 que $f(a+h) - f(a) = f'(a)\ h + o\big(f'(a).h\big) \sim f'(a)\ h$. ▲

En pratique : ce corollaire est très utile pour obtenir des équivalents.

Exemple : En appliquant ce corollaire aux fonctions $x \mapsto e^x, x \mapsto \ln(1+x), x \mapsto (1+x)^\alpha$, nous retrouvons les équivalents usuels au voisinage de 0.

1.e Condition nécessaire de dérivabilité

Proposition 11.4.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur I et $a \in I$.

Si f est dérivable au point a, **alors** f est continue au point a.

Nb : La réciproque de cette proposition est fausse : la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en ce point.

Démonstration ▽
Comme f est dérivable en a, alors φ_a possède une limite finie en a. En particulier, φ_a est bornée dans un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans I. Il existe donc $M \in \mathbf{R}^+$ tel que,

$$\forall x \in \mathcal{V} \setminus \{a\},\ \big|f(x) - f(a)\big| \leq M|x - a|.$$

En particulier $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. ▲

1.f Interprétation graphique

Proposition 11.5.— Soit Γ_f le graphe d'une fonction f définie sur I et $a \in I$.

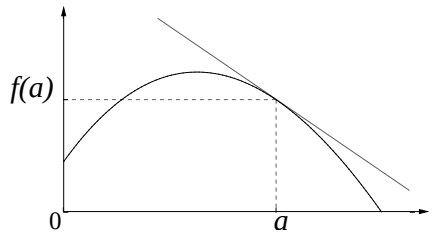
- Si f est dérivable au point a, alors Γ_f admet pour tangente au point $A = \big(a, f(a)\big)$. la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

- Si $\lim\limits_{x \to a} \varphi_a(x) = \pm\infty$, Γ_f a une tangente verticale en A.

Exemple : Considérons la fonction racine carrée $\sqrt{\cdot} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$. Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x} = +\infty$, le graphe de la fonction $\sqrt{\cdot}$ possède une tangente verticale en l'origine.

Illustration : **la dérivée est le coefficient directeur de la tangente**



Démonstration ▽
par définition de droite tangente, il s'agit de déterminer une famille $(\vec{u}_t)$ de vecteurs directeurs des cordes $M(a)M(t)$ pour la courbe plane paramétrée par : $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & f(t) \end{array} \right.$ possédant une limite non nulle lorsque $t \to a$.

- si f est dérivable en a, le point de paramètre a est régulier. La famille de vecteurs $\vec{u}_t = \left(1; \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}\right)$ dirige les cordes $M(a)M(t)$ et admet $\vec{u} = \big(1, f'(a)\big)$ comme limite au point a. Par conséquent, Γ_f admet pour tangente au point a la droite passant par $A\big(a, f(a)\big)$ et dirigée par $\vec{u}$.
- en ce cas, la famille de vecteurs $\vec{u}_t = \left(\dfrac{t - a}{f(t) - f(a)}, 1\right)$ dirige les cordes $M(a)M(t)$ et admet $\vec{u} = (0, 1)$ comme limite. Par conséquent, Γ_f admet une tangente verticale au point d'abscisse a. ▲

2 Fonction dérivée

Définition : *On dit que $f : I \to \mathbf{R}$ est **dérivable sur** I si f est dérivable en tout point de I. On définit alors la **fonction dérivée de** f, notée f', Df ou $\dfrac{df}{dx}$ par*

$$\begin{array}{rccc} f' : & I & \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

Notation : *$\mathcal{D}(I, \mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions dérivables sur I.*

Théorème 11.6.— Toute fonction dérivable sur I est continue sur I. En d'autres termes

$$\mathcal{D}(I, \mathbf{R}) \subset \mathcal{C}(I, \mathbf{R})$$

Démonstration ▽
Soit $a \in I$, il s'agit de prouver que f est continue en a. Comme par hypothèse f est dérivable sur I, elle est en particulier dérivable en $a \in I$. Le résultat découle donc directement de la **Proposition** 11.4. ▲

3 Opérations sur les fonctions dérivables

3.a Linéarité de la dérivation

Proposition 11.7.— Soit $(f, g) \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R})^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$,

- Si f et g sont dérivables en $a \in I$, alors la fonction $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ est dérivable en a et

$$\boxed{(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)'(a) = \lambda \cdot f'(a) + \mu \cdot g'(a)}$$

- En conséquence, si $f, g \in \mathcal{D}(I, \mathbf{R})$, alors $\lambda \cdot f + \mu \cdot g \in \mathcal{D}(I, \mathbf{R})$ et

$$\boxed{(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)' = \lambda \cdot f' + \mu \cdot g'}$$

Démonstration ▽
Soit $a \in I$, $x \in I \setminus \{a\}$. Comme f et g sont dérivables en a, il découle de la linéarité de la limite que

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(a)}{x - a} & = & \lambda \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} + \mu \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ & \xrightarrow[x \to a]{} & \lambda f'(a) + \mu g'(a) \end{array}$$

Ainsi, la fonction $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ est dérivable au point a et que $(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)'(a) = \lambda \cdot f'(a) + \mu \cdot g'(a)$. ▲

3.b Dérivée d'un produit

Proposition 11.8.— Soit $(f, g) \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R})^2$,

- Si f et g sont dérivables en $a \in I$, alors la fonction $f \times g$ est dérivable en a et

$$\boxed{(f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a)}$$

- En conséquence, si $f, g \in \mathcal{D}(I, \mathbf{R})$, alors $f \times g \in \mathcal{D}(I, \mathbf{R})$ et

$$\boxed{(f \times g)' = f' \times g + f \times g'}$$

Démonstration ▽
Soit $x \in I \setminus \{a\}$.

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{(f\times g)(x)-(f\times g)(a)}{x-a} & = & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\, g(a) + f(x)\, \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \\ & \xrightarrow[x\to a]{} & f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a). \end{array}$$

Ainsi, $f \times g$ est dérivable au point a et que $(f \times g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$. ▲

3.c Dérivée d'un quotient

Proposition 11.9.— Soit $(f, g) \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R})^2$,

- Si f et g sont dérivables en $a \in I$ et $g(a) \neq 0$, alors la fonction f/g est dérivable en a et

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\times g(a) - f(a)\times g'(a)}{g(a)^2}}$$

- En conséquence, si $f, g \in \mathcal{D}(I, \mathbf{R})$, et $g \neq 0$ sur I, alors $f/g \in \mathcal{D}(I, \mathbf{R})$ et

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\times g - f\times g'}{g^2}}$$

Démonstration ▽
Soit $x \in I \setminus \{a\}$. Remarquons que d'après la **Proposition** 11.4, g est continue au point a. Comme par hypothèse $g(a) \neq 0$, il résulte du **Corollaire** 8.10, que g est non nulle dans un voisinage de a. Par conséquent, la fonction f/g est bien définie au voisinage de a. De plus pour x voisin de a, on a

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(a)g(x)} = \frac{(f(x)-f(a))g(a) - f(a)(g(x)-g(a))}{g(a)g(x)}$$

Par suite

$$\frac{1}{x-a}\cdot\left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right) = \frac{1}{g(x)g(a)}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\, g(a) - f(a)\, \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right] \xrightarrow[x\to a]{} \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

▲

3.d Dérivée d'une fonction composée

Proposition 11.10.— Soit $g \in \mathscr{F}(J, \mathbf{R})$ et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R})$, telles que $f(I) \subset J$.

- Si f est dérivable en $a \in I$ et g est dérivable en $f(a)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et

$$\boxed{(g\circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big) \times f'(a)}$$

- En conséquence, si $g \in \mathscr{F}(J, \mathbf{R})$ et $f \in \mathcal{D}(I, \mathbf{R})$, alors $g \circ f \in \mathcal{D}(I, \mathbf{R})$ et

$$\boxed{(g\circ f)' = \big(g'\circ f\big) \times f'}$$

Remarque : La notation $\dfrac{df}{dx}$ est très pratique pour retenir et appliquer cette formule : pour calculer la dérivée de $x \mapsto g \circ f(x)$, faisons le changement de variable $y = f(x)$, la proposition ci-dessus se traduit par

$$\frac{d(g\circ f)}{dx} = \frac{dg}{dy}\big(f(x)\big) \times \frac{df}{dx}(x)$$

Démonstration ▽
Notons pour alléger $b = f(a)$. Le taux de variations de $g \circ f$ en a s'écrit

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(b)}{f(x) - b} \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

D'une part, comme f est dérivable en a, il vient $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.
D'autre part, comme g est dérivable en b et que f est continue en a (cf **Théorème** 11.4), le changement de variable $y(x) = f(x)$ donne :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad y(x) \xrightarrow[x \to a]{} b \\ \bullet \quad \dfrac{g(y) - g(b)}{y - b} \to g'(b) \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(b)}{f(x) - b} = g'(b)$$

On conclut alors par opérations algébriques sur des fonctions admettant des limites que

$$\lim_{x \to a} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} = g'(b) \times f'(a).$$

▲

Exemple : Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Si f est dérivable sur I, alors la fonction composée $x \mapsto f(x^n)$ l'est aussi et sa dérivée au point a est donnée par $f'(a^n) \times n a^{n-1}$.

Exercice : Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction paire (*resp.* impaire) et dérivable.
Montrez que f' est impaire (*resp.* paire).

3.e Dérivée de la bijection réciproque

Proposition 11.11.— Soit $f : I \to J$ une bijection continue [2] de l'intervalle I sur l'intervalle J.

- Si f est dérivable en $a \in I$, et si $f'(a) \neq 0$, alors la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est dérivable en $b = f(a)$ et

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}}$$

- En conséquence, si $f \in \mathcal{D}(I, \mathbf{R})$, et f' ne s'annule pas sur I, alors $f^{-1} \in \mathcal{D}(J, \mathbf{R})$ et

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}}$$

Remarque : Vous pouvez retrouver la formule de la dérivée de $\left(f^{-1}\right)'(b)$ en dérivant la relation $f^{-1} \circ f\,(x) = x$. Evaluez au point a l'égalité obtenue, il vient $\left(f^{-1}\right)'(b) \times f'(a) = 1$.

Commentaires : les dérivées des fonctions trigonométriques et hyperboliques réciproques ont été établies au **Chapitre 5** à l'aide de ce thèorème.

Démonstration ▽
Notons pour alléger $b = f(a)$ et formons le taux de variation de f^{-1} au point b. Alors

$$\Delta(y) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$$

Pour calculer la limite lorsque y tend vers b de Δ, faisons le changement de variable $x = f^{-1}(y)$. Comme f^{-1} est continue au point b, et f est dérivable au point a de dérivée non nulle $f'(a)$, nous avons

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad \lim\limits_{y \to b} x = a \\ \bullet \quad \lim\limits_{x \to a} \dfrac{x - a}{f(x) - f(a)} = \left(f'(a)\right)^{-1} \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \left(f'(a)\right)^{-1}.$$

▲

2. il s'agit donc nécessairement d'une fonction strictement monotone, d'après le **Théorème** 10.20

Exercice : Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ définie par $\forall x \in \mathbf{R}^+,\ f(x) = \sqrt{x} + x + 1$.

1. Montrez que f réalise une bijection de $\mathbf{R}^+$ sur $[1, +\infty[$. On note $g : [1, +\infty[\to \mathbf{R}$ son application réciproque.

2. Montrez que g est dérivable sur $[1, +\infty[$.

4 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

4.a Polynômes et fractions rationnelles

Par opérations algébriques sur des fonctions dérivables, nous en déduisons

Corollaire 11.12.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction polynomiale ou rationnelle définie sur I. Alors f est dérivable sur I.

Commentaires : une fraction rationnelle définie sur I s'écrit comme quotient de deux fonctions polynomiales :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

où Q ne s'annule pas dans I.

4.b Tableau des dérivées des fonctions usuelles

Nous avons :

Fonction	Dérivée	Intervalle	paramètres
• $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$f'(x) = \dfrac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q^2(x)}$	$x \in D_f$	
• $f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$x \in \mathbf{R}$	
• $f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$x \in \mathbf{R}^{+\star}$	
• $f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	$x \in]0, +\infty[$	$\alpha \in \mathbf{R}$
• $f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \sin(x + \dfrac{\pi}{2}) = \cos(x)$	$x \in \mathbf{R}$	
• $f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = \cos(x + \dfrac{\pi}{2}) = -\sin(x)$	$x \in \mathbf{R}$	
• $f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \in]-\pi/2 + k\pi; \pi/2 + k\pi[$	$k \in \mathbf{Z}$
• $f(x) = \mathrm{ch}\,(x)$	$f'(x) = \mathrm{sh}\,(x)$	$x \in \mathbf{R}$	
• $f(x) = \mathrm{sh}\,(x)$	$f'(x) = \mathrm{ch}\,(x)$	$x \in \mathbf{R}$	
• $f(x) = \mathrm{th}\,(x)$	$f'(x) = 1 - \mathrm{th}^{\,2}(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^{\,2}(x)}$	$x \in \mathbf{R}$	
• $f(x) = \mathrm{Arcsin}\,(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in]-1, 1[$	
• $f(x) = \mathrm{Arccos}\,(x)$	$f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in]-1, 1[$	
• $f(x) = \mathrm{Arctan}\,(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbf{R}$	

II Dérivées d'ordre supérieur

1 Définition, exemples

1.a Définition

Lorsque $f : I \to \mathbf{R}$ est dérivable, alors, elle admet une fonction dérivée.
Lorsque $f' : I \to \mathbf{R}$ est elle-même dérivable, on dit que f est deux fois dérivable sur I et on note $f'' : I \to \mathbf{R}$ la fonction dérivée de la dérivée de f. Ainsi de suite ...
Plus précisément,

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, on définit par récurrence les dérivées d'ordre 0,1,2,...,n,...de f lorsqu'elles existent par : $f^{(0)} = f$ et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, si $f^{(n)} : I \to \mathbf{R}$, est définie et dérivable dans I, alors f est dite $n+1$-fois dérivable dans I et on note $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$*

Vocabulaire : *si f admet une dérivée $n^{ième}$, on dit que f est n **fois dérivable**. Lorsque f admet des dérivées de tout ordre sur I, on dit que f est **indéfiniment dérivable**.*

Notation : *Lorsqu'elle existe, la fonction dérivée $n^{ième}$ de f est aussi notée $D^n f$ ou $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.*

Exemple : Soit f la fonction puissance $p^{\text{ième}}$ définie par $f(x) = x^p$. On démontre par récurrence que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ et que

- $\forall n \in [\![0, p]\!]$ $\quad f^{(n)}(x) = \dfrac{p!}{(p-n)!}\, x^{p-n}$
- $\forall n \in [\![p+1, +\infty[\![$, $\quad f^{(n)}(x) = 0$

Remarque : Par définition, pour que f soit $n+1$ fois dérivable sur I, il est nécessaire que f soit n fois dérivable sur I. De plus, d'après le **Théorème** 11.6, il faut que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f soit continue sur I.

Ceci conduit à adopter les notations suivantes :

Notation : *On note pour tout $n \in \mathbf{N}$,*

- $\mathcal{D}^n(I, \mathbf{R})$ *l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I.*
- $\mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$ *l'ensemble des fonctions n fois dérivables et de dérivée $n^{ième}$ continue sur I.*
- $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{R})$ *l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I.*

La remarque ci-dessus se traduit par la chaîne d'inclusions suivante :

$$\boxed{\mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{R}) \subset \cdots \subset \mathcal{D}^{n+1}(I, \mathbf{R}) \subset \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R}) \subset \mathcal{D}^n(I, \mathbf{R}) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^1(I, \mathbf{R}) \subset \mathcal{D}(I, \mathbf{R}) \subset \mathcal{C}(I, \mathbf{R})}$$

1.b Exemples

On démontre aisément par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^\star$ que :

- les fonctions polynomiales et fonctions rationnelles,
- les fonctions exponentielles, logarithmes, puissances,
- les fonctions trigonométriques et trigonométriques réciproques,
- les fonctions hyperboliques et hypeboliques réciproques,

sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs intervalles respectifs de dérivation.

Exercice : Montrez que les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^{+\star}$ et déterminez leurs dérivées successives.

Solution ▽
Comme x ne s'annule pas sur $\mathbf{R}^{+\star}$, la fraction rationnelle $f : \mathbf{R}^{+\star} \to \mathbf{R}^{+\star}$ qui à x associe $\dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle. Calculons ses premières dérivées successives :
$f'(x) = (-1) \times \dfrac{1}{x^2}$, $f"(x) = (-1)(-2) \times \dfrac{1}{x^3}$.
A ce stade, nous pouvons conjecturer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, f est n fois dérivable sur $\mathbf{R}^{+\star}$ et que pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2)\cdots(-n)\,\frac{1}{x^{n+1}} = (-1)^n\,\frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Montrons cette formule par récurrence :
Initialisation : *nous avons déjà vérifié la formule pour* $n = 1$.
Hérédité : *soit* $n \in \mathbf{N}^\star$ *tel que* $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) = \left((-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}\right)'^{\text{ABUS}} \\ &= (-1)^n (-n-1) \frac{1}{x^{n+2}} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}. \end{aligned}$$

Conclusion : *par récurrence, nous avons démontré que* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbf{R}^{+\star}$ *et que pour tout* $x \in \mathbf{R}^{+\star}$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Rappelons que $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$. *Par conséquent, pour tout entier naturel* n *supérieur ou égal à 2,*

$$\ln^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

▲

2 Opérations sur les fonctions n-fois dérivables

2.a Linéarité de la dérivée $n^{\text{ième}}$

Proposition 11.13.— Soit $(f, g) \in \mathcal{D}^n(I, \mathbf{R}) \times \mathcal{D}^n(I, \mathbf{R})$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.
Alors $\lambda \cdot f + \mu \cdot g \in \mathcal{D}^n(I, \mathbf{R})$ et,

$$\boxed{\left(\lambda \cdot f + \mu \cdot g\right)^{(n)} = \lambda \cdot f^{(n)} + \mu \cdot g^{(n)}}$$

Si de plus $(f, g) \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$, alors $\lambda \cdot f + \mu \cdot g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$.

Commentaires : on résume ces propriétés en disant que $\mathcal{D}^n(I, \mathbf{R})$ et $\mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$. La dérivée $n^{\text{ième}}$ est alors une application linéaire de $\mathcal{D}^n(I, \mathbf{R})$ vers $\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$ et induit –par restriction– une application linéaire de $\mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$ vers $\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$.

Démonstration ▽
Lorsque $n = 0$, il n'y a rien à démontrer. Montrons par récurrence le résultat pour $n \in \mathbf{N}^\star$:
Initialisation : Lorsque $n = 1$, il s'agit de la **Proposition** 11.7.
Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que la dérivée $n^{\text{ième}}$ soit linéaire. Montrons qu'il en va de même pour la dérivée $n+1$ $^{\text{ième}}$.
Considérons deux fonctions f et g, $n+1$ fois dérivables dans I. Comme $\mathcal{D}^{n+1}(I\mathbf{R}) \subset \mathcal{D}^n(I, \mathbf{R})$, f et g sont en particulier n fois dérivables dans I. Par hypothèse de récurrence, il en résulte que $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ est n fois dérivable et que

$$\left(\lambda \cdot f + \mu \cdot g\right)^{(n)} = \lambda \cdot f^{(n)} + \mu \cdot g^{(n)}.$$

Or, par hypothèse, les fonctions f et g étant $n+1$ fois dérivables sur I, il s'ensuit que les fonctions $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ sont dérivables. La **Proposition** 11.7 montre en ce cas que la fonction $\left(\lambda \cdot f + \mu \cdot g\right)^{(n)}$ est dérivable dans I et que sa dérivée est donnée par :

$$\left(\left(\lambda \cdot f + \mu \cdot g\right)^{(n)}\right)' = \lambda \cdot f^{(n+1)} + \mu \cdot g^{(n+1)}$$

Par définition de la dérivée $n+1$ $^{\text{ième}}$, c'est exactement dire que $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ est $n+1$ fois dérivable dans I et que

$$\left(\lambda \cdot f + \mu \cdot g\right)^{(n+1)} = \lambda \cdot f^{(n+1)} + \mu \cdot g^{(n+1)}.$$

Conclusion : par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ on a montré qu'une combinaison linéaire de deux fonctions n-fois dérivables est elle-même n-fois dérivable et que sa dérivée $n^{\text{ième}}$ est la combinaison linéaire des dérivées $n^{\text{ièmes}}$ des deux fonctions. ▲

2.b Produit de fonctions n-fois dérivables

Théorème 11.14.— Formule de Leibniz
Soit $(f,g) \in \mathcal{D}^n(I,\mathbf{R}) \times \mathcal{D}^n(I,\mathbf{R})$. Alors $f \times g \in \mathcal{D}^n(I,\mathbf{R})$ et,

$$\boxed{\big(f \times g\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}}$$

Si de plus $(f,g) \in \mathcal{C}^n(I,\mathbf{R})$, alors $f \times g \in \mathcal{C}^n(I,\mathbf{R})$.

Démonstration ▽
La preuve –basée sur la **Proposition** 11.8– sera par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^\star$.
Initialisation : lorsque $n = 1$, d'après la **Proposition** 11.8

$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g' = \binom{1}{0} f^{(0)} \times g^{(1)} + \binom{1}{1} f^{(1)} \times g^{(0)}.$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que la formule de Leibniz soit vraie pour les fonctions dérivables n fois. Montrons qu'il en va de même pour les fonctions $n+1$ fois dérivables.
Soit donc f et g deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I. Elles sont en particulier n fois dérivables et l'hypothèse de récurrence s'applique :

$$\big(f \times g\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$$

Comme f et g sont $n+1$ fois dérivables, j'en déduis que pour tout entier $k \in [\![0;n]\!]$, les fonctions $f^{(k)}$ et $g^{(n-k)}$ sont dérivables. D'après les **Propositions** 11.7 et 11.8, il s'ensuit que $\big(f \times g\big)^{(n)}$ est dérivable comme combinaison linéaire de fonctions dérivables. De plus :

$$\begin{aligned}
\big(f \times g\big)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} \times g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} \times g^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k+1)} \\
&= f^{(n+1)} \times g + f \times g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] f^{(k)} \times g^{(n-k+1)} \\
&= f^{(n+1)} \times g + f \times g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k+1)}.
\end{aligned}$$

Conclusion : La propriété est vérifiée pour $n = 1$ et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, et trivialement vérifiée pour $n = 0$. ▲

Exercice : Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ un entier naturel non nul fixé. Calculez la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $g : \mathbf{R}^{+\star} \to \mathbf{R}^{+\star}$ définie par $g(x) = x^{n-1} \ln x$.

Solution ▽
Les fonctions ln *et* $x \mapsto x^{n-1}$ *sont de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbf{R}^{+\star}$. *La fonction* g *est donc indéfiniment dérivable comme produit de telles fonctions. De plus, d'après la formule de* Leibniz, *pour tout* $x \in \mathbf{R}^{+\star}$,

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \big(x^{n-1}\big)^{(n-k)} \times \big(\ln x\big)^{(k)}.$$

Or, pour $k \in [\![1,n]\!]$, $\big(x^{n-1}\big)^{(n-k)} = \dfrac{(n-1)!}{\big((n-1)-(n-k)\big)!}\, x^{(n-1)-(n-k)} = \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!}\, x^{k-1}$

et pour $k=0$, $\left(x^{n-1}\right)^{(n-0)}=0$. *Ainsi*

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!}\,x^{k-1}\times(-1)^{k-1}\,\frac{(k-1)!}{x^k} \\ &= -\frac{(n-1)!}{x}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=\frac{(n-1)!}{x}, \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de la formule $0=(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$. ▲

2.c Inverses et quotients de fonctions n-fois dérivables

Proposition 11.15.— Soit $(f,g)\in\mathcal{D}^n(I,\mathbf{R})\times\mathcal{D}^n(I,\mathbf{R})$. On suppose que g ne s'annule par sur I. Alors

$$1/g \text{ et } f/g \text{ sont } n \text{ fois dérivables sur } I.$$

Si de plus $(f,g)\in\mathcal{C}^n(I,\mathbf{R})\times\mathcal{C}^n(I,\mathbf{R})$, alors $f/g\in\mathcal{C}^n(I,\mathbf{R})$.

Démonstration ▽

Soit $\tau:\mathbf{R}^\star\to\mathbf{R}^\star$ définie par

$$\forall x\in\mathbf{R}^\star,\quad \tau(x)=\frac{1}{x}$$

La fonction τ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^\star$. Comme $f/g=f\times(\tau\circ g)$, le résultat découle de la proposition ci-dessus et de la proposition ci-dessous ! ▲

2.d Composée de fonctions n-fois dérivables

Proposition 11.16.— Soit $(f,g)\in\mathcal{D}^n(I,\mathbf{R})\times\mathcal{D}^n(J,\mathbf{R})$. On suppose que $f(I)\subset J$. Alors

$$g\circ f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I.$$

Si de plus $(f,g)\in\mathcal{C}^n(I,\mathbf{R})\times\mathcal{C}^n(J,\mathbf{R})$, alors $g\circ f\in\mathcal{C}^n(I,\mathbf{R})$.

Démonstration ▽

La preuve sera... par récurrence sur $n\in\mathbf{N}^\star$:

Initialisation : Lorsque $n=1$, d'après la **Proposition** 11.10, la fonction $g\circ f$ est dérivable et

$$(g\circ f)'=g'\circ f\times f'$$

Hérédité : Soit $n\in\mathbf{N}^\star$, tel que la composée de deux fonctions n fois dérivables soit n fois dérivable. Considérons f et g des fonctions $n+1$ fois dérivables dans I. Utilisons alors l'astuce :

$$(g\circ f)^{(n+1)}=\left((g\circ f)^{(n)}\right)'=\left(g\circ f)'\right)^{(n)}$$

Or d'après la **Proposition** 11.10 $(g\circ f)'=g'\circ f\times f'$.

- comme f est $n+1$ fois dérivable, f' est n fois dérivable.
- Comme g est $n+1$ fois dérivable, g' est n fois dérivable.

Ainsi les fonctions f et g' sont toutes deux n fois dérivables : par hypothèse de récurrence, il en résulte que la composée $g'\circ f$ est n fois dérivable. Enfin, comme $(g\circ f)'=g'\circ f\times f'$ est le produit de deux fonctions n fois dérivables, il découle de la **Formule de Leibniz** que $(g\circ f)'$ est n fois dérivable, c'est-à-dire $g\circ f$ est $(n+1)$ fois dérivable.

Conclusion : Par récurrence sur $n\in\mathbf{N}^\star$, nous avons démontré que la composée de deux fonctions n fois dérivables est n fois dérivable.

La même récurrence montre que la composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est de classe $\mathcal{C}^n$. ▲

2.e Application réciproque d'une bijection n-fois dérivable

Proposition 11.17.— Soit $f : I \to J$ une bijection n-fois dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^n$). On suppose que f' ne s'annule pas dans I. Alors $f^{-1} : J \to I$ est n-fois dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^n$) dans J.

Démonstration ▽
Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété «l'application réciproque de toute bijection de classe $\mathcal{C}^n$ dont la dérivée ne s'annule pas dans I est n-fois dérivable.» On montre par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^\star$ que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier.

- **Init :** lorsque $n = 1$ c'est le **théorème 11.11**
- **Hérédité :** soit $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Soit $f : I \to J$ une bijection $n+1$-fois dérivable dans I et dont la dérivée ne s'annule pas. En particulier, comme f est dérivable et que sa dérivée ne s'annule pas dans I, f^{-1} est dérivable et

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

  Par hypothèse de récurrence, f^{-1} est n-fois dérivable et par conséquent $f' \circ f^{-1}$ est n-fois dérivable dans I comme composée de telles fonctions. De plus, comme elle ne s'annule pas dans I, son inverse est aussi n-fois dérivable dans I. Finalement on a bien établi que $\left(f^{-1}\right)'$ est n-fois dérivable, ce qui assure que f est $n+1$-fois dérivable.
- **Conclusion :** par récurrence, on a montré que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. ▲

3 Extension aux fonctions à valeurs complexes

Définition : *Une fonction $f : I \to \mathbf{C}$ est dite **dérivable au point** $a \in I$ si ses parties réelles et imaginaires u et v le sont. En ce cas*

$$f'(a) = u'(a) + iv'(a)$$

est appelé le nombre[3] *dérivé de f en a.*

Définition : *Une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est dite de **classe** $\mathcal{C}^n$ sur I si ses parties réelles et imaginaires u et v le sont. Et dans ce cas,*

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \forall x \in I,\ \ f^{(k)}(x) = u^{(k)}(x) + iv^{(k)}(x).$$

Exercice : Soit $\alpha \in \mathbf{C}$, montrez que f_α est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \left(e^{\alpha\, x}\right)^{\prime \text{ABUS}} = \alpha e^{\alpha x}$$

III Théorèmes fondamentaux

1 Extremums locaux d'une fonction dérivable

1.a Définition

D'après le **Théorème** 10.22 ou le **Théorème** 10.24, toute fonction continue $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ sur un segment est bornée et atteint ses bornes, elle possède donc un maximum et un minimum sur $[a, b]$:

$$\exists(\alpha, \beta) \in [a, b]^2,\ \forall x \in [a, b],\ f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$$

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction numérique et $a \in I$.*

- *On dit que f présente un **maximum local** (resp. un **minimum local**) en a s'il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}_I(a)$ tel que*

$$\forall x \in V,\quad f(x) \leq f(a)$$
$$\textit{resp.}\quad \forall x \in V,\quad f(x) \geq f(a)$$

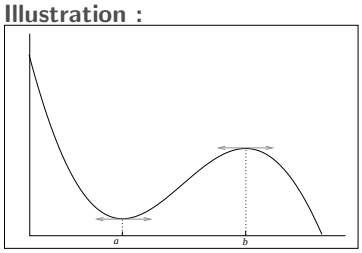
3. complexe

- *On dit que f admet un **maximum global** (resp. un **minimum global**) en a si*

$$\forall x \in I,\ f(x) \leq f(a)$$
$$resp.\quad \forall x \in I,\ f(x) \geq f(a)$$

Vocabulaire : *un maximum ou un minimum est appelé un extremum*

Illustration :



Remarque : lorsque f admet un extremum global au point a, alors f admet un extremum local en a, mais la réciproque est fausse. Par exemple, la fonction représentée ci-contre admet un maximum local et un minimum local en des points à l'intérieur de lintervalle qui ne sont pas des extremums globaux.

1.b Condition nécessaire d'extremalité

Géométriquement, il est clair que si f possède un extremum local en un point **intérieur** à I, la tangente au graphe Γ_f en ce point doit être horizontale. Plus précisément, nous avons le **théorème fondamental** suivant :

Théorème 11.18.— Extremum local d'une fonction dérivable —. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur I, et $a \in \overset{\circ}{I}$ un point **intérieur** à I.

Si f présente un extremum local en a, **alors** $f'(a) = 0$.

Interprétation : $f'(a) = 0$: la tangente à Γ_f au point d'abscisse a est horizontale.

Remarque : il s'agit d'une condition nécessaire mais non suffisante d'extrémalité. Par exemple, la dérivée de la fonction $x \mapsto x^3$ s'annule en 0, mais 0 n'est pas un extremum local de cette fonction.

Démonstration ▽
Soit $a \in \overset{\circ}{I}$ tel que f soit dérivable en a et possède un minimum local en a. Notons $\ell = f'(a)$. Par définition de la dérivée de f en a, les dérivées à gauche et à droite sont égales à ℓ. Or,

- Si $x < a$, alors $0 \geq \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a^-]{} f'_g(a)$.
- Si $x > a$, alors $0 \leq \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a^+]{} f'_d(a)$.

Par passage à la limite dans des inégalités, il vient $f'_g(a) \leq 0$ et $f'_d(a) \geq 0$. Comme les dérivées à gauche et à droite coïncident en $a \in \overset{\circ}{I}$, il s'ensuit que $f'(a) = 0$. ▲

En pratique : l'étude des variations de f permet de déterminer les extremums locaux de f :

maximum local

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$

ni-ni

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$+$

minimum local

x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$+$

ni-ni

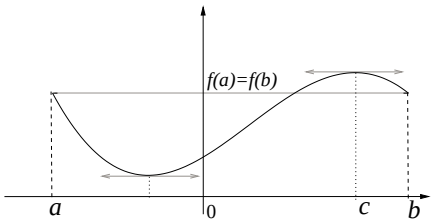
x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$-$

2 Théorème de Rolle

Théorème 11.19.— Théorème de Rolle
Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur le segment non trivial[4] $[a, b]$ et dérivable dans $]a, b[$.

Si $f(a) = f(b)$, **alors** il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Interprétation graphique : si $f(a) = f(b)$, le graphe de f présente , en un point d'abscisse $c \in]a, b[$, une tangente horizontale.



Démonstration ▽
Nous allons démontrer que f admet un extremum global (et donc local) à l'intérieur du segment.Pour cela, nous distinguons deux cas :

- si f est constante, alors $c = \frac{1}{2}(a + b)$ convient.
- si f n'est pas constante, on note $\nu = f(a) = f(b)$. D'après le **Théorème** 10.24 rappelé ci-dessus, il existe $(\alpha, \beta) \in [a, b]^2$ tel que
$$\forall x \in [a, b],\ f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$$
Comme f n'est pas constante $f(\alpha) < f(\beta)$. En particulier $\nu \neq f(\alpha)$ ou $\nu \neq f(\beta)$.
  - ▷ si $\nu \neq f(\alpha)$, alors f atteint son minimum en $\alpha \in]a, b[$, qui vérifie $f'(\alpha) = 0$.
  - ▷ si $\nu \neq f(\beta)$, alors f atteint son maximum en $\beta \in]a, b[$, qui vérifie $f'(\alpha) = 0$.

Dans tous les cas, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. ▲

3 Théorèmes des accroissements finis

Soit $f : I \to \mathbf{R}$, $a \in I$. Si f est dérivable en a alors
$$f'(a) = \lim_{x \overset{\neq}{\to} a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
$f'(a)$ est un accroissement in*finit*ésimal de f. Les théorèmes des accroissements finis font le **lien fondamental** entre les *accroissements infinitésimaux* d'une fonction f dérivable (*i.e.* les nombres dérivées de f) et ses taux de variations, appelés – en opposition aux précédents– *accroissements finis* de f.

3.a Égalité des accroissements finis

Théorème 11.20.— Egalité des accroissements finis
Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur le segment non trivial[5] $[a, b]$ et dérivable dans $]a, b[$.

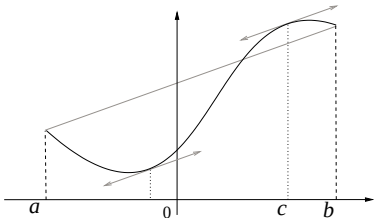
Il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

Commentaires : La formule des accroissements finis est donc une égalité entre un accroissement fini de f d'une part, et un accroissement infinitésimal d'autre part.

4. *i.e.* $a < b$
5. *i.e.* $a < b$

Interprétation graphique :
Soit A et B les points du plan de coordonnées respectives $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.
Le quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le coefficient directeur de la droite (A, B). L'**égalité des accroissements finis** montre qu'il existe un point $c \in]a, b[$ tel que la tangente à Γ_f au point $C(c, f(c))$ soit parallèle à la droite (A, B).

Illustration : L'égalité des accroissements finis



Lorsque $f(a) = f(b)$, la droite (AB) est horizontale : nous retrouvons précisément le **théorème de Rolle**. Ainsi, le théorème des accroissements finis est une généralisation du théorème de Rolle.

Démonstration ▽

il suffit de tourner un peu le graphique ci-dessus pour retrouver la situation de Rolle. Pour cela, on retranche à f une fonction affine de même pente que la corde $[AB]$,

Introduisons la fonction auxiliaire $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in [a, b], \quad g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a)$$

Par opérations algébriques, la fonction g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus $g(a) = g(b)$. D'après le **Théorème de Rolle**, la dérivée de g doit s'annuler en un point $c \in]a, b[$: ainsi

$$0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

▲

3.b Inégalités des accroissements finis

Théorème 11.21.— Inégalité des accroissements finis —. Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur le segment non trivial $[a, b]$ et dérivable dans $]a, b[$, et $(m, M) \in \mathbf{R}^2$ un couple de réels.

si pour tout $x \in]a, b[$, $m \leq f'(x) \leq M$, **alors** $m \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$,

Commentaires : par définition, une dérivée est la limite des taux d'accroissements : il s'agit d'un taux d'accroissement in*finit*ésimal. Par opposition, l'accroissement de f entre a et b est un accroissement *fini*.
Bien entendu, si tous les accroissements finis sont compris entre m et M, alors tous les accroissements infinitésimaux le sont aussi par passage à la limite dans des inégalités. Les **inégalités des accroissements finis** affirment que la réciproque est vraie :

Si les accroissements infinitésimaux sont bornés, **alors** les accroissements finis le sont aussi.

En pratique : vous utilisez les inégalités des accroissements finis pour obtenir des inégalités entre fonctions. La difficulté consiste à bien identifier a et b.

Démonstration ▽
D'après l'**Egalité des accroissements Finis**, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(c)$. Les inégalités désirées en découlent directement. ▲

Exercice : On note $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ la fonction racine carrée.

1. Soit $x > 0$ fixé. Montrez que $\forall t \in [x, x+1]$, $\quad \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f'(t) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. En déduire que $\forall x \in \mathbf{R}^{+\star}$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Solution ▽
La fonction f est continue sur $\mathbf{R}^+$ et dérivable dans $\mathbf{R}^{+\star}$.

1. *Soit $x > 0$. Alors pour tout $t \in [x, x+1]$, $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$. Comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbf{R}^+$, il vient*

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2. *Soit $x > 0$ fixé. Comme f est dérivable sur $\mathbf{R}^{+\star}$, nous pouvons appliquer l'inégalité des accroissements finis pour f entre x et $x+1$. Nous obtenons directement*

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

▲

Comme une fonction réelle est bornée si et seulement si sa valeur absolue est majorée, nous obtenons :

Corollaire 11.22.— Inégalité des accroissements finis —. Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur le segment non trivial $[a,b]$ et dérivable dans $]a,b[$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbf{R}^+$ un réel positif tel que

$$\forall x \in]a,b[, \quad |f'(x)| \leq k$$

Alors

$$\boxed{\forall (x,y) \in [a,b]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|}$$

Corollaire 11.23.— Si $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbf{R})$, alors f est lipschitzienne de constante $k = \sup_{[a,b]} |f'|$.

Exercice : Montrez que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\left|\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}\right| \leq x^3$

Solution ▽
Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}^+, \ f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

f est dérivable sur $\mathbf{R}^+$ par OPA et pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, $f'(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$.
Soit $x > 0$ fixé. Appliquons les IAF sur le segment $[0,x]$:

$$\forall t \in [0,x], \quad |f'(t)| = \frac{t^2}{1+t} \leq x^2.$$

Ainsi, tous les accroissements infinitésimaux de f sont dominés par x^2. D'après les IAF, il en va de même des accroissements finis. En particulier,

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| \leq x^2$$

ce qui revient précisément à dire que :

$$\left|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right| \leq x^3$$

▲

3.c Extension aux fonctions à valeurs complexes

Dans le cas d'une fonction $f : I \to \mathbf{C}$ dérivable à valeurs complexes, le **théorème de Rolle** et l'**égalité des accroissements finis** *ne se généralisent pas.*

Par exemple, la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ définie par $\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) = e^{it}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ de fonction dérivée $f' = if$. En particulier, f' ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$ bien que $f(0) = f(2\pi)$.

En revanche, les inégalités des accroissements finis subsistent :

Théorème 11.24.— Inégalité des accroissements finis —. Soit $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ une fonction continue dans $[a, b]$ et dérivable dans $]a, b[$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbf{R}^+$ tel que $\forall x \in]a, b[,\quad |f'(x)| \leq M$. Alors

$$\boxed{|f(b) - f(a)| \leq M\,|b - a|}$$

Démonstration ▽
Notons $f = u + iv$ et $f(b) - f(a) = \alpha + i\beta$. Introduisons la fonction réelle $\varphi : I \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall t \in I,\quad \varphi(t) = \mathfrak{Re}\left[(\alpha - i\beta)\ f(t)\right] = \alpha\ u(t) + \beta\ v(t)$$

Par opérations algébriques sur de telles fonctions, φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable dans $]a, b[$. De plus, pour tout $t \in]a, b[$, nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \left|\varphi'(t)\right| & = & \left|\alpha\ u'(t) + \beta\ v'(t)\right| = \left|\mathfrak{Re}\left[(\alpha - i\beta)\ f'(t)\right]\right| \\ & \leq & \left|\alpha - i\beta\right| \times \left|f'(t)\right| \\ & \leq & M\left|f(b) - f(a)\right| \end{array}$$

D'après les inégalités des accroissements finis appliqués à φ, il vient $\left|\varphi(b) - \varphi(a)\right| \leq M\left|f(b) - f(a)\right|\left|b - a\right|$, soit après simplification :

$$\left|f(b) - f(a)\right| \leq M|b - a|$$

▲

En particulier, si $M = 0$, nous obtenons :

Corollaire 11.25.— Soit $f : I \to \mathbf{C}$ une fonction continue dans I, dérivable dans $\overset{\circ}{I}$.

f est constante dans I *si et seulement si* $\forall t \in I, f'(t) = 0$.

4 Fonctions monotones dérivables

4.a Caractérisation des fonctions monotones dérivables

L'objet de ce paragraphe est de préciser ce que nous utilisons déjà depuis longtemps à savoir qu'une fonction dérivable de dérivée positive est croissante. Plus précisément :

Théorème 11.26.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle non trivial[6] I.

- f est constante sur I *si et seulement si* $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.
- f est croissante sur I *si et seulement si* $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I *si et seulement si* $\forall x \in I,\ f'(x) \leq 0$.

Démonstration ▽

6. i.e. $\overset{\circ}{I} \neq \emptyset$

- Supposons que $f'=0$, montrons que f est constante :
  Soit $a\in I$ fixé, $x\in I\setminus\{a\}$, appliquons l'**inégalité des accroissements finis** entre a et x : $|f(x)-f(a)|\leq 0\cdot|x-a|=0$.
  Par conséquent $f(x)=f(a)$. Ainsi, $\forall x\in I,\ f(x)=f(a)$.

  Réciproquement, si f est constante sur I, montrons que sa dérivée est nulle.
  Soit $a\in I$ fixé et $x\in I$. Alors $\varphi_a(x)=0$. Par conséquent $\lim\limits_{x\to a}\varphi_a(x)=0$.
- Supposons que $f'\geq 0$, montrons que f est croissante.
  Soit $(a,b)\in I^2$ tels que $a\leq b$.
  - Si $a=b$, alors $f(a)=f(b)$,
  - Si $a<b$, appliquons l'**égalité des accroissements finis** entre a et b : il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)\times(b-a)$. Comme $a<b$ et $f'(c)$ est positif par hypothèse, il en résulte que $f(b)-f(a)\geq 0$, *i.e.* $f(a)\leq(f(b)$.

  Dans tous les cas, $f(a)\leq f(b)$.

  Réciproquement, supposons f croissante, et montrons que f' est positive.
  Soit $a\in I$ fixé et $x\in I$. Comme f est croissante, a et x sont rangés dans le même ordre que $f(a)$ et $f(x)$. Par conséquent, le rapport $\varphi_a(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est positif. En passant à la limite lorsque x tend vers a, j'en déduis que $f'(a)\geq 0$.
- *multiplie le deuxième* ■*par* -1. ▲

Exercice : Démontrez que $\forall x\in\mathbf{R}^\star,\operatorname{Arctan}x+\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x}=\mathsf{sgn}(x)\,\dfrac{\pi}{2}$.

Notation : *Dans cet énoncé,* $\mathsf{sgn}(x)$ *désigne le signe de* x.

Solution ▽
Notons pour tout nombre réel x *non nul,* $\varphi(x)=\operatorname{Arctan}x+\operatorname{Arctan}(1/x)$. *Il s'agit de prouver que la fonction* φ *est constante sur chacun des deux intervalles ouverts* $]-\infty;0[$ *et* $]0;+\infty[$. *Pour cela, montrons que* φ *est dérivable sur chacun des ces intervalles :*

- *la fonction* $x\mapsto 1/x$ *est dérivable sur* $\mathbf{R}^\star$, *à valeurs dans* $\mathbf{R}$.
- *la fonction* Arctan *est dérivable sur* $\mathbf{R}$.

Ainsi, $x\mapsto\operatorname{Arctan}(1/x)$ *est dérivable sur* $\mathbf{R}^\star$ *comme composée de fonctions dérivables. Par opérations algébriques, il en résulte que* φ *est dérivable sur* $\mathbf{R}^\star$. *De plus, sa dérivée en un point* $x\in\mathbf{R}^\star$ *est donnée par :*

$$\varphi'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+(1/x)^2}\times\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0.$$

En appliquant le **Théorème** *11.26 sur* $]-\infty;0[$ *d'une part, et* $]0;+\infty[$ *d'autre part, j'en déduis que* φ *est constante sur chacun de ces intervalles.*
Pour déterminer la valeur de ces constantes, il suffit d'évaluer la fonction φ *en* ±1. *Comme* $\operatorname{Arctan}(\pm1)=\pm\dfrac{\pi}{4}$, *l'égalité désirée en découle.* ▲

4.b Caractérisation des fonctions strictement monotones dérivables

Corollaire 11.27.— Soit $f:I\to\mathbf{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle non trivial I.

- f est strictement croissante sur I *si et seulement si* f' est positive ou nulle sur I et ne s'annule sur aucun sous-intervalle non trivial de I.
- f est strictement décroissante sur I *si et seulement si* f' est négative ou nulle sur I et ne s'annule sur aucun sous-intervalle non trivial de I.

Commentaires : il se peut que la dérivée d'une fonction strictement croissante s'annule en des points isolés. Par exemple $x\mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Démonstration ▽
CN Soit f une fonction dérivable strictement croissante. D'après la proposition précédente, sa dérivée est positive (ou nulle). De plus, sa dérivée ne peut s'annuler sur un sous-intervalle non trivial de I, car sinon, toujours d'après la

proposition précédente, elle serait constante sur ce sous-intervalle.
CS Soit f une fonction dérivable telle que sa dérivée est positive et ne s'annule sur aucun sous-intervalle non trivial de I. En ce cas, f est croissante sur I. Montrons **par l'absurde** qu'elle est strictement croissante.
Sinon, il existe $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$ et $f(a) = f(b)$. En ce cas, par croissance de f, nous avons pour tout $x \in [a,b]$,

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \text{ et } f(a) = f(b)$$

Par conséquent, f est constante sur $[a,b]$. D'après la proposition précédente, cela entraîne sure f' s'annule sur $[a,b]$. *Contradiction.* ▲

5 Dérivabilité aux bornes de l'intervalle

Théorème 11.28.— Limite de la dérivée —. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur I, dérivable dans $I \setminus \{a\}$.

$$\textbf{Si } \lim_{x \overset{\neq}{\to} a} f'(x) = \ell \in \bar{\mathbf{R}}, \textbf{ alors } \lim_{x \overset{\neq}{\to} a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

En particulier

- **Si** $\lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} a} f'(x) = \ell \in \mathbf{R}$, **alors** f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
- **Si** $\lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} a} f'(x) = \pm\infty$, **alors** f n'est pas dérivable en a mais Γ_f présente une tangente verticale au point d'abscisse a.

Remarque : ce théorème s'applique *mutatis mutandis* à l'étude de la dérivabilité en b et se génréalise aussi à $a \in \overset{\circ}{I}$ pour obtenir les dérivées à gauche et à droite au point a.

En pratique : vous utilisez ce théorème pour obtenir la dérivée en une borne de l'intervalle de dérivabilité de f comme limite des dérivées à droite (ou à gauche).

Démonstration ▽
Supposons que $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = \ell \in \bar{\mathbf{R}}$, et montrons que $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$.
Soit $x \in I$. On applique l'**Egalité des Accroissements Finis** entre a et x : il existe $t_x \in]a,x[$ tel que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(t_x).$$

Or $a \leq t_x \leq x$. D'où $\begin{array}{c} \lim\limits_{x \to a^+} t_x = a \\ \lim\limits_{t \to a^+} f'(t) = \ell \end{array}\Bigg)$. Par composition des limites, il s'ensuit que $\lim\limits_{x \to a^+} f'(t_x) = \ell$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$. ▲

Exercice : Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ définie par $\forall x > 0, f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

1. Montrez que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f la fonction continue sur $\mathbf{R}^+$ ainsi obtenue.
2. Montrez que f est dérivable sur $\mathbf{R}^+$.

Ce théorème s'applique pour les fonctions dérivables de dérivées continues au point a. L'exercice suivant montre un exemple de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^{+\star}$, dérivable en 0, mais telle que sa dérivée n'est pas continue en 0.

Exercice : Soit $g :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ la fonction définie par $\forall x > 0, g(x) = x^2 \sin(1/x)$.

1. Montrez que g est prolongeable par continuité en 0. On note encore g la fonction continue sur $\mathbf{R}^+$ ainsi obtenue.
2. Montrez que g est dérivable en 0, mais que g' n'a pas de limite quand $x \to 0^+$.