PROGRAMME DE COLLE S18

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

POLYNÔMES À UNE INDÉTERMINÉE

Opérations algébriques dans $\mathbf{K}[X]$ et degré

Proposition*.— Soit $(P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$. Alors

1. $d^\circ(P+Q) \leq \max\{d^\circ P, d^\circ Q\}$ [5]
2. $d^\circ(P \times Q) = d^\circ P + d^\circ Q$
3. $d^\circ(\lambda P) = d^\circ P$
4. $d^\circ P' = d^\circ P - 1$ si P est non constant.

Définition : *Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$, $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.*

- *Le **polynôme dérivé** de P est défini par $P' = \sum_{k=1}^n k.a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}X^k$*
- *Les **dérivées successives** de P sont définies par récurrence par $P^{(0)} = P$ et $\forall k \in \mathbf{N}$, $P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'$.*

Proposition*.— Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Alors $P^{(p)} = \sum_{k=p}^n a_k \frac{k!}{(k-p)!} X^{k-p}$ si $p \in [\![0,n]\!]$ et $P^{(p)} = 0$ si $p > n$.

Proposition*.— Soit $(P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2$, $n \in \mathbf{N}$. Alors $(P+Q)^{(n)} = P^{(n)} + Q^{(n)}$ et $(P \times Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} \times Q^{(n-k)}$

Théorème.— Formule de Taylor pour les polynômes —. Soit $P \in \mathbf{K}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbf{K}$ un scalaire. Alors

$$\boxed{P = P(\alpha) + \frac{P'(\alpha)}{1!}(X-\alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2!}(X-\alpha)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^n = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k}$$

Théorème.— Théorème de la division euclidienne —. Soit $(A,B) \in \mathbf{K}[X] \times \left(\mathbf{K}[X] \setminus \{0\}\right)$.

$$\boxed{\textbf{Il existe un couple } (Q,R) \in \mathbf{K}[X]^2, \textbf{unique tel que } \begin{cases} A = B \times Q + R \\ d^\circ R < d^\circ B \end{cases}}$$

Corollaire.— Soit $(A,B) \in \mathbf{K}[X]^2$, $B \neq 0$. B divise A *ssi* le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Racines d'un polynôme

Définition : *Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbf{K}$. α est **racine** de P si $\tilde{P}(\alpha) = 0$.*

Théorème.— Caractérisation des racines —. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbf{K}$.

$$\boxed{\alpha \text{ est une racine de } P \;\; \textit{si et seulement si} \;\; (X-\alpha) \text{ divise } P}$$

Proposition-Définition.— Soit $P \in \mathbf{K}[X]$, $\alpha \in \mathbf{K}$. α est racine d'ordre de multiplicité $r \in \mathbf{N}^\star$ de P *si et seulement si* il existe $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)^r \times Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

Théorème.— Caractérisation des racines multiples —. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$, $\alpha \in \mathbf{K}$ et $r \in \mathbf{N}^\star$.

$$\boxed{\alpha \text{ est racine d'ordre } r \text{ de } P \quad \textit{si et seulement si} \quad \begin{cases} \bullet \;\; P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0 \\ \bullet \;\; P^{(r)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}}$$

Proposition.— Racines complexes d'un polynôme à coefficients réels —. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Pour tous $\alpha \in \mathbf{C}$, $r \in \mathbf{N}^\star$

$$\boxed{\alpha \text{ est racine d'ordre } r \text{ de } P \textit{ si et seulement si } \bar{\alpha} \text{ est racine d'ordre } r \text{ de } P}$$

5. avec égalité si $d^\circ P \neq d^\circ Q$

Corollaire.— Soit $P \in \mathbf{K}_n[X]$.

- si $d^\circ P = n$, alors P admet au plus n racines comptées avec multiplicité.
- si le nombre de racines de P comptées avec multiplicité est supérieur à $n+1$ alors $P = 0$.

■■■ Factorisation des polynômes

Théorème*.— TFA —. Tout polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ **non constant** admet une racine complexe.

Théorème*.— Décomposition primaire d'un polynôme —. $P \in \mathbf{K}[X]$ se factorise de façon unique sous la forme

▸$[\mathbf{K} = \mathbf{C}]$
$$P = a\,(X-\alpha_1)^{r_1} \times \cdots \times (X-\alpha_p)^{r_p} = a \prod_{k=1}^{p} (X-\alpha_k)^{r_k},$$
où $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont les racines complexes distinctes de P de multiplicités respectives $r_1, \ldots, r_p$.

▸$[\mathbf{K} = \mathbf{R}]$
$$P = a \prod_{k=1}^{p} (X-\alpha_k)^{r_k} \times \prod_{j=1}^{q} \left(X^2 + \beta_j X + \gamma_j\right)^{s_j},$$
où $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont les racines réelles distinctes de P de multiplicités respectives $r_1, \ldots, r_p$ et les polynômes à coefficients réels $\left(X^2 + \beta_j X + \gamma_j\right)$ ne possèdent pas de racines réelles.

Définition : $P \in \mathbf{K}[X]$ *est* ***scindé*** *sur* $\mathbf{K}$ *s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de degré* 1.

Proposition.— Caractérisation à l'aide des racines —. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbf{N}$.

P est scindé sur $\mathbf{K}$ *si et seulement si* il admet n racines comptées avec multiplicité

Définition : Fonction symétriques élémentaires *Soit* $n \in \mathbf{N}^\star$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$. *Les* ***fonctions symétriques élémentaires*** *des* $x_1, \ldots x_n$ *sont les quantités* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ *définies par* $\sigma_k = \displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdot < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$

Théorème*.— Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme scindé de degré $n \in \mathbf{N}^\star$. Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$,

$x_1, \ldots, x_n$ sont les racines distinctes ou confondues de P *si et seulement si* $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\sigma_k = (-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n}$

■■■ Arithmétique dans $\mathbf{K}[X]$

Théorème*.— PGCD-PPCM —. Soit $(A, B) \in \big(\mathbf{K}[X] \setminus \{0\}\big)^2$. Il existe un unique polynôme $\Delta \in \mathbf{K}[X]$, (*resp* . $M \in \mathbf{K}[X]$) unitaire et tel que

	■	$\forall P \in \mathbf{K}[X]$	$P \mid A$ et $P \mid B \iff P \mid \Delta$
resp.	■	$\forall P \in \mathbf{K}[X]$	$A \mid P$ et $B \mid P \iff M \mid P$

Δ est le **plus grand diviseur commun** de A et B, on note $\Delta = PGCD(A, B) = A \wedge B$. M est le **plus petit multiple commun** de A et B, on note $M = PPCM(A, B) = A \vee B$.

Théorème*.— Théorème de Bezout —. Soit $(A, B) \in \big(\mathbf{K}[X] \setminus \{0\}\big)^2$.

A et B sont premiers entre eux *ssi* il existe un couple $(U, V) \in \mathbf{K}[X]^2$, tel que $AU + BV = 1$

Théorème*.— Théorème de Gauss —. Soit $(A, B, C) \in \mathbf{K}[X]^3$. **Si** $A \mid BC$ et $A \wedge B = 1$ **alors** $A \mid C$.

Théorème*.— Soit $(A, B) \in \mathbf{K}[X]^2$ tels que $A = a\, P_1^{\alpha_1} \times \cdots \times P_N^{\alpha_N}$ et $B = b\, P_1^{\beta_1} \times \cdots \times P_N^{\beta_N}$, où $P_1, \ldots, P_N$ sont des polynômes irréductibles unitaires et $\alpha_1, \ldots, \alpha_N, \beta_1, \ldots, \beta_N$ des entiers naturels. Alors

$$PGCD(A, B) = \prod_{k=1}^{N} P_k^{\min(\alpha_k, \beta_k)} \quad \text{et} \quad PPCM(A, B) = \prod_{k=1}^{N} P_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)}$$