PROGRAMME DE COLLE S06

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

▪▪▪ Intégrales et primitives

Théorème*.— Soit $f, g : I \to \mathbf{K}$ deux fonctions continues sur un intervalle I, $(a,b) \in I^2$ des réels. Alors

- **Linéarité de l'intégrale** Si $(\alpha,\beta) \in \mathbf{K}^2$, alors $\displaystyle\int_a^b (\alpha\cdot f + \beta\cdot g)(t)\,dt = \alpha\int_a^b f(t)\,dt + \beta\int_a^b g(t)\,dt$
- **Relation de Chasles** Si $(a,b,c) \in I^3$, alors $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt.$

Théorème*.— Existence de primitive —. Toute fonction continue sur I possède des primitives sur I.

Théorème*.— TFCI —. Si $F : I \to \mathbf{K}$ est une primitive de f sur I, alors pour tout $(a,b) \in I^2$:

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Théorème.— Intégrale fonction de sa borne supérieure —. Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbf{K})$, $a \in I$. On considère la fonction $F_a : I \to \mathbf{K}$ définie pour tout $x \in I$ par $F_a(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. Alors F_a est dérivable sur I et $F_a' = f$, autrement dit

$$\boxed{\text{pour tout } x \in I, \quad F_a'(x) = f(x)}$$

Corollaire.— Intégration par parties —. Soit $(u,v) \in \mathcal{C}^1(I,\mathbf{K})^2$. Pour tout $(a,b) \in I^2$

$$\boxed{\int_a^b u'(t)\times v(t)\,dt = \Big[u(t)\times v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)\times v'(t)\,dt.}$$

Théorème.— Changement de variable —. Soit $f \in \mathcal{C}(J,\mathbf{K})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(I,\mathbf{R})$ telle que $\varphi(I) \subset J$. Pour tout $(a,b) \in I^2$

$$\boxed{\int_a^b f\circ\varphi(t)\times\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du}$$

▪▪▪ Équations différentielles linéaires d'ordre $n \in \{1,2\}$

Soit $a_0, a_1, b : I \to \mathbf{K}$ des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. On note

$$\begin{array}{lrcl} (E_1) & y' + a_0(t)y & = & b(t) \\ (H_1) & y' + a_0(t)y & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lrcl} (E_2) & y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y & = & b(t) \\ (H_2) & y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y & = & 0 \end{array}$$

Théorème*.— Conséquences de la linéarité —. Les solutions de (E_n) sont les fonctions de la forme $f = f_0 + h$, où f_0 est une solution particulière de (E_n) et h est une solution quelconque de (H_n).

Proposition*.— Principe de superposition —. Soit $f_1, f_2 : I \to \mathbf{K}$, $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{K}^2$.

- **si** f_1 est solution de l'équation différentielle $y^{(n)} + \cdots + a_0(t)y = b_1(t)$,
- **et** f_2 est solution de l'équation différentielle $y^{(n)} + \cdots + a_0(t)y = b_2(t)$,

alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de l'équation $y^{(n)} + \cdots + a_0(t)y = \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)$.

▪▪▪ Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Soit $a, b : I \to \mathbf{K}$ deux fonctions continues sur un intervalle I. On note (E_1) $y' + a(t)y = b(t)$ l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient continu et (H_1) $y' + a(t)y = 0$ l'équation homogène associée.

Théorème.— Résolution de l'équation homogène —. Soit $A : I \to \mathbf{K}$ une primitive de a.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (H_1) \text{ sont les fonctions définies sur } I \text{ par } h(t) = Ce^{-A(t)}, \ \text{ où } C \in \mathbf{K}}$$

Remarque : lorsque le coefficient a est constant, les solutions de (H_1) sont les fonctions définies par $h(t) = C\,e^{-at}$.

Théorème.— Méthode de la variation de la constante —. Soit $a, b : I \to \mathbf{K}$ des fonctions continues sur I. Notons $A : I \to \mathbf{K}$ une primitive de a sur I et $c : I \to \mathbf{K}$ une primitive de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ sur I.

$$\boxed{\text{la fonction } f_0 : I \to \mathbf{K} \text{ définie par } f_0(t) = c(t)e^{-A(t)} \text{ est une solution particulière de } (E_1)}$$

Savoir-faire : la recherche d'une solution particulière de (E_1) par la méthode de la variation de la constante.

Théorème*.— Problème de Cauchy d'ordre 1 —. Étant donné $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbf{K}$, il existe une fonction dérivable $f : I \to \mathbf{K}$, unique, telle que $\left\{\begin{array}{rcl} y' + a(t)y & = & b(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right.$. Elle est définie par :

$$\boxed{\text{pour tout } t \in I, \quad f(t) = \left[y_0 e^{A(t_0)} + \int_{t_0}^{t} b(u)e^{A(u)}\, du\right] \ e^{-A(t)}}$$

■■■ Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Soit $(a, b) \in \mathbf{K}^2$ et $c : I \to \mathbf{K}$ continue. On note (E_2) $y'' + ay' + by = c(t)$ l'EDL d'ordre 2 à coefficients constants, (H_2) $y'' + ay' + by = 0$ l'équation homogène et (EC) $r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique associées.

Théorème*.— solutions complexes de (H_2) —. Soit $(a, b) \in \mathbf{C}^2$. On note Δ le discriminant de (EC). Les solutions de (H_2) sont les fonctions définies sur I par

- si $\Delta \neq 0$: pour tout $t \in I$ $\quad h(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \ (C_1, C_2) \in \mathbf{C}^2$
- si $\Delta = 0$: pour tout $t \in I$ $\quad h(t) = (C_1 + C_2 t)e^{r_0 t}, \ (C_1, C_2) \in \mathbf{C}^2$

où on a noté suivant les cas (r_1, r_2) les racines distinctes et r_0 la racine double de (EC).

Théorème*.— solutions réelles de (H_2) —. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. On note Δ le discriminant de (EC). Les solutions réelles de (H_2) sont les fonctions définies sur I par

- si $\Delta > 0$: pour tout $t \in I$ $\quad h(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \ (C_1, C_2) \in \mathbf{R}^2$
- si $\Delta = 0$: pour tout $t \in I$ $\quad h(t) = (C_1 + C_2 t)e^{r_0 t}, \ (C_1, C_2) \in \mathbf{R}^2$
- si $\Delta < 0$: pour tout $t \in I$ $\quad h(t) = e^{rt}\big[C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)\big], \ (C_1, C_2) \in \mathbf{R}^2$

où on a noté, suivant les cas r_1 et r_2 les racines réelles distinctes, r_0 la racine réelle double, $r \pm i\omega$ les racines complexes et conjuguées de (EC).

Savoir-faire : trouver une solution particulière de l'équation (E_2) en imitant le second membre $c(t)$.

Proposition*.— Recherche d'une solution particulière —.

- **2^d membre polynôme** : si $c(t) = P_m(t)$, il existe une solution de la forme $Q_m(t)$ [2] lorsque $b \neq 0$, de la forme $t\,Q_m(t)$ si $a \neq 0$ et $b = 0$, de la forme $t^2 Q_m(t)$ sinon.
- **2^d membre polynôme-exponentielle** : si $c(t) = P_m(t)\,e^{\alpha t}$, il existe une solution de la forme $Q_m(t)\,e^{\alpha t}$ si α n'est pas racine de (EC), de la forme $t\,Q_m(t)\,e^{\alpha t}$ si α est racine simple de (EC) et de la forme $t^2 Q_m(t)\,e^{\alpha t}$ sinon.
- **2^d membre polynôme-trigo** : si $c(t) = P_m(t)\,\cos(\omega t)$, ou $c(t) = P_m(t)\,\sin(\omega t)$, une solution (à valeurs réelles) de (E_2) est obtenue en prenant la partie réelle (ou imaginaire) d'une solution de $(\tilde{E}_2)$ $\quad y'' + ay' + by = P_m(t)\,e^{i\omega t}$.

Théorème*.— Problème de Cauchy d'ordre 2 —. Soit $(a, b) \in \mathbf{K}^2$, $c : I \to \mathbf{K}$ une fonction continue. Étant donné $t_0 \in I$, $(y_0, y_1) \in \mathbf{K}^2$, il existe une fonction 2-fois dérivable $f : I \to \mathbf{K}$, unique, telle que $\left\{\begin{array}{l} y'' + ay' + by = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \text{ et } y'(t_0) = y_1 \end{array}\right.$.

2. $Q_m(t)$ est un polynôme de degré m

Quelques primitives usuelles

fonction	Primitives	Intervalles de validité
$x \mapsto x^{\alpha}$ avec $\alpha \neq -1$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$I \subset \mathbf{R}$ si $\alpha \in \mathbf{N}$ $I \subset \mathbf{R}^{\star}$ si $\alpha \in \mathbf{Z}^{-}$, $I \subset \mathbf{R}^{+\star}$ si $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(\|x\|) + C$	$I \subset \mathbf{R}^{\star}$
$x \mapsto e^{x}$	$x \mapsto e^{x} + C$	$I \subset \mathbf{R}$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto x\ln(x) - x + C$	$I \subset \mathbf{R}^{+\star}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + C$	$I \subset \mathbf{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + C$	$I \subset \mathbf{R}$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto -\ln(\|\cos x\|) + C$	$I \subset \mathcal{D}_{tan}$
$x \mapsto \mathrm{ch}\,(x)$	$x \mapsto \mathrm{sh}\,(x) + C$	$I \subset \mathbf{R}$
$x \mapsto \mathrm{sh}\,(x)$	$x \mapsto \mathrm{ch}\,(x) + C$	$I \subset \mathbf{R}$
$x \mapsto \mathrm{th}\,(x)$	$x \mapsto \ln(\mathrm{ch}\, x) + C$	$I \subset \mathbf{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{a^2+x^2}$	$x \mapsto \dfrac{1}{a}\mathrm{Arctan}\,(\frac{x}{a}) + C$	$I \subset \mathbf{R}, a > 0$
$x \mapsto \dfrac{1}{a^2-x^2}$	$x \mapsto \frac{1}{2a}\ln\left(\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|\right) + C$	$I \subset \mathbf{R} \setminus \{\pm a\}, a > 0$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \mathrm{Arcsin}\,(x) + C$	$I \subset]-1, 1[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \mapsto \ln(\|x + \sqrt{x^2-1}\|) + C$	$I \subset]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \mapsto \ln((x + \sqrt{1+x^2})) + C$	$I \subset \mathbf{R}$