PROGRAMME DE COLLE S29

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

Intégrale d'une fonction continue (par morceaux) sur un segment

Théorème*.— approximation uniforme d'une fonction continue sur $[a,b]$ par des fonctions en escalier —. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbf{R})$ une fonction continue sur $[a,b]$ et $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a,b], \mathbf{R})$ des fonctions en escalier t.q.

- $0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon$
- $\varphi \leq f \leq \psi$

Théorème*.— Intégrale d'une fonction continue sur un segment —. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbf{R})$. On définit l'intégrale de a à b de f par :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \inf\left\{ \int_a^b \varphi(t)\,dt;\ \varphi \in \mathscr{E}([a,b], \mathbf{R}), \varphi \geq f \right\} = \sup\left\{ \int_a^b \varphi(t)\,dt;\ \psi \in \mathscr{E}([a,b], \mathbf{R}), \psi \leq f \right\}$$

Définition : *Une fonction $f \in \mathscr{F}([a,b], \mathbf{R})$ est dite* ***continue par morceaux*** *sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que pour tout indice $i \in [\![0, n-1]\!]$:*

- *La fonction $f_| :]a_i, a_{i+1}[\to \mathbf{R}$ est continue*
- *La fonction $f_| :]a_i, a_{i+1}[\to \mathbf{R}$ se prolonge continument en $f_i : [a_i, a_{i+1}] \to \mathbf{R}$.*

On note $\mathcal{C}_m([a,b], \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

Définition : *Soit $f \in \mathcal{C}_m([a,b], \mathbf{R})$, $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ une subdivision adaptée à f. On définit l'intégrale de f entre a et b par :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{a_0}^{a_1} f_0(t)\,dt + \int_{a_1}^{a_2} f_1(t)\,dt + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f_{n-1}(t)\,dt$$

Propriétés de l'intégrale

Théorème*.— Propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux —. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbf{R}$, $(a \leq b)$, $c \in [a,b]$ un point de $[a,b]$. Pour tout couple de fonctions $(f,g) \in \mathcal{C}_m([a,b], \mathbf{R})^2$, et tout couple de scalaires $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, on a :

- **Linéarité :** $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt$
- **Croissance :** **si** $f \leq g$, **alors** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt.$
- **Relation de Chasles :** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$
- **Positivité :** **si** $f \geq 0$, **alors** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geq 0.$

Proposition*.— Définie-positivité de l'intégrale des fonctions continues —. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbf{R}^+)$ une fonction **continue et positive** sur le segment $[a,b]$.

$$f \text{ est identiquement nulle } \textit{si et seulement si } \int_a^b f(t)\,dt = 0$$

Corollaire*.— Estimations d'intégrales —. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbf{R}$, $(a \leq b)$ et $(f,g) \in \mathcal{C}_m([a,b], \mathbf{R})^2$. On a :

- **Valeur absolue** $\displaystyle\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$
- **Inégalité de Cauchy-Schwarz :** $\displaystyle\left| \int_a^b f(t)g(t)\,dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}\ \sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt}$

Remarque : soit f, g des fonctions continues sur $[a,b]$, le cas d'égalité l'ICS correspond au cas où les fonctions f et g sont colinéaires.

Théorème.— Valeur moyenne d'une fonction continue —. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbf{R})$. Il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = f(c)}$$

▪▪▪ Liens fondamentaux entre intégrales et primitives

Le **Théorème fondamental du calcul intégral** se décline sous plusieurs formes :

Théorème.— Intégrale fonction de sa borne supérieure —. Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbf{R})$, une fonction **continue** sur un **intervalle**, $a \in I$ et $F : I \to \mathbf{R}$ définie par $\forall x \in I,\ F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. Alors F est dérivable sur I et $F' = f$

Théorème.— Primitives d'une fonction continue —. Toute fonction **continue** $f \in \mathcal{C}(I,\mathbf{R})$ sur l'**intervalle** I possède des primitives sur I. Etant donné $a \in I$, l'unique primitive F_a de f sur I, qui s'annule au point a est définie par

$$\boxed{\forall x \in I, \quad F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$$

Théorème.— Théorème fondamental du calcul intégral —. Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbf{R})$ et F une primitive *quelconque* de f sur I, alors pour tout $(a,b) \in I^2$

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Corollaire.— Représentation intégrale des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ —. Soit $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbf{R})$, $a \in I$, alors

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt}$$

▪▪▪ Calculs d'intégrales

Théorème.— Intégration par parties —. soit $(u,v) \in \mathcal{C}^1(I,\mathbf{R})^2$, alors pour tout $(a,b) \in I^2$

$$\boxed{\int_a^b u'(t) \times v(t)\,dt = \Big[u(t) \times v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t) \times v'(t)\,dt}$$

Théorème.— Changement de variable —. soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbf{R})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(J,\mathbf{R})$ telle que $\varphi(J) \subset I$. Alors pour tout $(a,b) \in I^2$

$$\boxed{\int_a^b f \circ \varphi(t) \times \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du}$$

▪▪▪ Approximations d'intégrales

Définition : *Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbf{R})$ une fonction continue sur le segment $[a,b]$. Pour tout entier n, on considère la subdivision régulière $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a,b]$. On appelle une* ***somme de Riemann*** *de rang n de f toute somme*

$$\boxed{\mathcal{R}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i), \ \text{ où } c_i \in [a_i, a_{i+1}]}$$

La suite $\big(\mathcal{R}_n(f)\big)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ est appelée une suite de sommes de Riemann de f.

Théorème*.— Convergence des sommes de Riemann —. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbf{R})$ une fonction continue sur le segment $[a,b]$. Toute suite de sommes de Riemann de f est convergente de limite $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

fonction	Primitives	Intervalles de validité
$x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$I \subset \mathbf{R}$ si $\alpha \in \mathbf{N}$ $I \subset \mathbf{R}^{+\star}$ ou $I \subset \mathbf{R}^{-\star}$ si $\alpha \in \mathbf{Z}^-$, $I \subset \mathbf{R}^{+\star}$ si $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(\lvert x\rvert) + C$	$I \subset \mathbf{R}^{+\star}$ ou $I \subset \mathbf{R}^{-\star}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x + C$	$I \subset \mathbf{R}$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto x\ln(x) - x + C$	$I \subset \mathbf{R}^{+\star}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + C$	$I \subset \mathbf{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + C$	$I \subset \mathbf{R}$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto -\ln(\lvert\cos x\rvert) + C$	$I \subset \mathcal{D}_{tan}$
$x \mapsto \mathrm{ch}\,(x)$	$x \mapsto \mathrm{sh}\,(x) + C$	$I \subset \mathbf{R}$
$x \mapsto \mathrm{sh}\,(x)$	$x \mapsto \mathrm{ch}\,(x) + C$	$I \subset \mathbf{R}$
$x \mapsto \mathrm{th}\,(x)$	$x \mapsto \ln(\mathrm{ch}\,x) + C$	$I \subset \mathbf{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \mathrm{Arctan}\,(x) + C$	$I \subset \mathbf{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$	$x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert + C$	$I \subset]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \mathrm{Arcsin}\,(x) + C$	$I \subset]-1,1[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \mapsto \ln(\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert) + C$	$I \subset]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \mapsto \ln((x+\sqrt{1+x^2})) + C$	$I \subset \mathbf{R}$