PROGRAMME DE COLLE S13

NB : seules les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

FONCTIONS CONTINUES SUR UN INTERVALLE

■■■ Notions de continuité

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et $a \in I$. On dit que*

- *f est **continue au point** a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$*
- *f est **continue à gauche (resp . à droite) en** a si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$. (resp . $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$)*
- *f est **continue sur** I si f est continue en tout point de I.*

Définition : *Soit I un intervalle, $a \in I$. Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbf{R}$. On dit que f est **prolongeable par continuité** au point a si f admet une limite finie en a. En ce cas, la fonction $\tilde{f} : I \to \mathbf{R}$ définie par $\forall x \in I \setminus \{a\}, \tilde{f}(x) = f(x)$ et $\tilde{f}(a) = \lim\limits_{x \xrightarrow{\neq} a} f(x)$ est une fonction continue sur I, appelée le **prolongement continu** de f en a.*

Théorème*.— Caractérisation séquentielle de la continuité .—Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et $a \in I$.

$$f \text{ est continue en } a \quad ssi \quad \left(\forall (x_n) \in I^{\mathbf{N}}\right), \left(\lim_{n\to+\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)\right).$$

Proposition*.— Principe de prolongement des inégalités .— Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$, $a \in I$. On suppose que f et g sont continues en a.

- **Si** $f(a) < g(a)$, **alors** il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans I tel que $\forall x \in \mathcal{V},\ f(x) < g(x)$.
- **S'**il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans I tel que $\forall x \in \mathcal{V} \setminus \{a\},\ f(x) \leq g(x)$ **alors** $f(a) \leq g(a)$.

■■■ Propriétés des fonctions continues sur un intervalle

Théorème*.— Opérations algébriques sur les fonctions continues —. Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$.

- Si f est continue sur I, alors λf est continue sur I .
- Si f et g sont continues sur I, alors $f + g$ est continue sur I.
- Si f et g sont continues sur I, alors $f \times g$ est continue sur I.
- Si f et g sont continues et g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.

Théorème*.— Composition de fonctions continues —. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et $g : J \to \mathbf{R}$. On suppose que $f(I) \subset J$.

Si f et g sont continues, alors la fonction composée $h = g \circ f$ est continue sur I.

Proposition.— Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$ deux fonctions réelles définies sur I, $a \in I$. Alors

- **Si** f est continue au point a, **alors** $|f|$ est continue au point a.
- **Si** f et g sont continues au point a, **alors** $\max(f, g)$ est continue au point a.
- **Si** f et g sont continues au point a, **alors** $\min(f, g)$ est continue au point a.

■■■ Les théorèmes fondamentaux

Image d'un intervalle par une fonction continue

Le TVI s'énonce de trois manières équivalentes.

Théorème*.— TVI énoncé théorique —. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. L'ensemble des images, $f(I)$, est aussi un intervalle.

Théorème*.— TVI énoncé général —. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. Pour tout couple $(a, b) \in I^2$, f atteint toute valeur γ intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.

Théorème.— TVI énoncé pratique —. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une application continue sur I. Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$.

$$\textbf{Si } f(a) \times f(b) \leq 0 \quad \textbf{alors} \quad \text{il existe un élément } c \in I \text{ tel que } f(c) = 0.$$

Savoir-faire : Étant donné deux fonctions f et g définies et continues sur un intervalle I, vous devez savoir utiliser le TVI pour démontrer l'**existence** d'une solution de l'équation $f(x) = 0$, ou plus généralement, $f(x) = g(x)$.

Image d'un segment par une fonction continue

Théorème*.— Image continue d'un segment —. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes. Plus précisément, il existe $\alpha, \beta \in [a, b]$ tels que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta).$$

Fonctions monotones continues

Théorème.— Continuité globale des fonctions monotones —. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction monotone. Alors

$$f \text{ est continue sur } I \textit{ si et seulement si } f(I) \text{ est un intervalle.}$$

Théorème*.— Théorème de la bijection bicontinue —. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et f une application **continue et strictement monotone** sur I. Alors

- $J = f(I)$ est un intervalle,
- $f : I \to J$ est une bijection de I sur J,
- l'application réciproque $f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone, de même monotonie que f.
- $f^{-1} : J \to I$ est continue de J sur I.

Proposition.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction injective et continue sur I. Alors f est strictement monotone.

Théorème*.— Soit $f : I \to J$ une fonction **bijective et continue** d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ sur J. Alors $f^{-1} : J \to I$ est continue sur J.

■■■ Continuité uniforme

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction. On dit que f* ***est uniformément continue sur*** *I si :*

$$(\forall \varepsilon > 0),\ (\exists \eta > 0),\ (\forall (x, y) \in I^2),\quad (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction, $k \in \mathbf{R}^+$. On dit que f* ***est lipschitzienne de constante*** *k, ou plus simplement k-lipschitzienne sur I si* $\forall (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$

Proposition.— Liens entre continuité, uniforme continuité et lipschitziennité —

- Une fonction uniformément continue sur I est continue sur I.
- Une fonction lipschitzienne est uniformément continue sur I.

Remarque : les réciproques sont fausses.

Théorème*.— Théorème de Heine —. Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Alors

$$f \text{ est uniformément continue sur } [a, b].$$