PROGRAMME DE COLLE S12

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

ÉTUDE LOCALE DES FONCTIONS (I) (2/2)

▪▪▪ Comparaison locale des fonctions

Définition : *Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. On dit que f*

- *est **dominée par** g au voisinage de a, et on note $f = \mathcal{O}_a(g)$ s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans I et une fonction $\varphi \in \mathcal{V} \to \mathbf{R}$ tels que*
$$\begin{cases} \bullet \quad \forall x \in \mathcal{V}, \quad f(x) = \varphi(x)g(x) \\ \bullet \quad \varphi \text{est bornée dans } \mathcal{V} \end{cases}$$
- *est **négligeable devant** g au voisinage de a, et on note $f = o_a(g)$ s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans I et une fonction $\varphi \in \mathcal{V} \to \mathbf{R}$ tels que*
$$\begin{cases} \bullet \quad \forall x \in \mathcal{V}, \quad f(x) = \varphi(x)g(x) \\ \bullet \quad \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0 \end{cases}$$
- *est f **est équivalente à** g au voisinage de a, et on note $f \sim_a g$ s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans I et une fonction $\varphi \in \mathcal{V} \to \mathbf{R}$ tels que*
$$\begin{cases} \bullet \quad \forall x \in \mathcal{V}, \quad f(x) = \varphi(x)g(x) \\ \bullet \quad \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 1 \end{cases}$$

Proposition*.— Caractérisations à l'aide du quotient —. Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. On suppose que g ne s'annule pas dans $I \setminus \{a\}$ et que f et g sont continues au point a si $a \in I$. Alors

- $f = \mathcal{O}_a(g) \iff \dfrac{f}{g}$ *est bornée au voisinage de a*
- $f = o_a(g) \iff \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
- $f \sim_a (g) \iff \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$

Théorème*.— Caractérisation de l'équivalence à l'aide de la différence —. Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, alors

$$\boxed{f \sim_a g \iff f - g = o_a(g).}$$

▪▪▪ Propriétés des fonctions équivalentes

Proposition*.— Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. On suppose que $f \sim_a g$. Alors

- $\forall h \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R}), \quad h = \mathcal{O}_a(f) \iff h = \mathcal{O}_a(g),$
- $\forall h \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R}), \quad h = o_a(f) \iff h = o_a(g),$
- $\forall h \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R}), \quad f = \mathcal{O}_a(h) \iff g = \mathcal{O}_a(h),$
- $\forall h \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R}), \quad f = o_a(h) \iff g = o_a(h).$

Théorème.— Propriété fondamentale des fonctions équivalentes —. Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. On suppose que $f \sim_a g$. Alors

$$\boxed{(\forall \ell \in \bar{\mathbf{R}}), \quad \left(\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to a} g(x) = \ell \right).}$$

Savoir-faire : déterminer un équivalent simple pour étudier une limite.

Proposition*.— Signe de fonctions équivalentes —. Soit $(f, g) : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.
On suppose que $f \sim_a g$. Alors

$$\boxed{f > 0 \text{ au voisinage de } a \textit{ si et seulement si } g > 0 \text{ au voisinage de } a}$$

■■■ Obtention d'équivalents

Théorème.— Opérations compatibles avec l'équivalence —. Soit $f_1, f_2, g_1, g_2 : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$ et $\alpha \in \mathbf{R}^\star$. On suppose que $f_1 \sim_a f_2$ et $g_1 \sim_a g_2$. Alors

- **Produit** $f_1 g_1 \sim_a f_2 g_2$.
- **Quotient** si de plus g_1 ne s'annule pas dans $I \setminus \{a\}$, alors $\dfrac{f_1}{g_1} \sim_a \dfrac{f_2}{g_2}$
- **Puissance** si de plus $f_1 > 0$ dans $I \setminus \{a\}$, alors $f_1^\alpha \sim_a f_2^\alpha$.

Théorème*.— Équivalent d'une somme —. Soit $f, h : I \to \mathbf{R}$ et $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.

- **Somme Si** $h = o_a(f)$, **alors** $f + h \sim_a f$.

Savoir-faire : classer les termes d'une somme par ordre de négligeabilité pour obtenir un équivalent.

Proposition*.— Équivalent d'une somme de fonctions positives —. Soit $f_1, f_2, g_1, g_2 : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. On suppose qu'au voisinage de a, f_1 et g_1 sont positives.

$$\boxed{\textbf{Si } f_1 \sim_a f_2 \text{ et } g_1 \sim_a g_2, \textbf{ alors } f_1 + g_1 \sim_a f_2 + g_2}$$

Théorème*.— Changement de variable —. Soit $f, g : J \to \mathbf{R}$, $y \in I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$ et $b \in \bar{J}$, tels que $y(I) \subset J$.

$$\boxed{\textbf{Si} \quad \left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x \to a} y(x) = b \\ \bullet \ f(y) \sim_b g(y) \end{array}\right) \quad \textbf{alors} \quad f \circ y(x) \sim_a g \circ y(x)}$$

Savoir-faire : effectuer un changement de variable pour se ramener à des équialents usuels.

Proposition.— Équivalent d'un accroissement —. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en $a \in I$ telle que $f'(a) \neq 0$. Alors

$$\boxed{f(x) - f(a) \sim_a f'(a) \cdot (x - a)}$$

■■■ Comparaison de fonctions usuelles

Théorème*.— Croissances comparées des fonctions usuelles
Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R}^{+\star}$ tels que $\alpha < \beta$, et $a > 1$, alors

Au voisinage de 0	**Au voisinage de $+\infty$**
$(\ln x)^\gamma = o_0(1/x^\alpha)$. $x^\beta = o_0(x^\alpha)$	$(\ln x)^\gamma = o_{+\infty}(x^\alpha)$ $x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$ $x^\alpha = o_{+\infty}(a^x)$

Théorème*.— Équivalents usuels
Au voisinage de 0, nous disposons des équivalents suivants :

• $\sin x \sim x$	• $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$	• $\tan x \sim x$
• $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$	• $\ln(1+x) \sim x$	• $e^x - 1 \sim x$

Proposition*.— Équivalents d'un polynôme
Soit P la fonction polynomiale définie sur $\mathbf{R}$ par

$$(\forall x \in \mathbf{R}),\ P(x) = a_d\, x^d + a_{d+1}\, x^{d+1} + \cdots + a_{n-1}\, x^{n-1} + a_n\, x^n, \quad \text{où } a_n \text{ et } a_d \text{ sont non nuls.}$$

Au voisinage de $\pm\infty$ $\quad P(x) \sim a_n\, x^n$ (monôme dominant)
Au voisinage de 0 $\quad P(x) \sim a_d\, x^d$ (monôme de plus bas degré)