Chapitre 27

Séries numériques

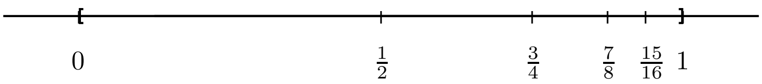
Sommaire

Introduction

Le but de ce chapitre est de donner un sens à une somme comprenant une infinité de termes.
Considérons par exemple la *somme infinie*

$$\ell = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$$

Pour comprendre quel sens donner à cette *somme infinie*, représentons la situation sur la droite réelle. Remarquons qu'on prend le segment $[0, 1]$, on le coupe en deux, on obtient un segment de longueur $1/2$. On coupe le reste en deux segments de longueur $1/4$ ainsi de suite.



Cette somme apparaît comme une *limite*

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = 1$$

I Généralités

1 Définition des séries numériques

Définition : Série de terme général u_n
Etant donnée une suite $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, on lui associe la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k}$$

Autrement dit :

$$\begin{array}{rcl} U_0 & = & u_0 \\ U_1 & = & u_0 + u_1 \\ U_2 & = & u_0 + u_1 + u_2 \\ & \ldots & \\ U_n & = & u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ & \ldots & \end{array}$$

*La suite (U_n) est appelée la **série de terme général** u_n. On la note simplement*[1] $\sum u_n$.
*Pour $n \in \mathbf{N}$ fixé, U_n s'appelle la **somme partielle de rang** n de la série $\sum u_n$.*

Notations :

1. *Dans tout le chapitre, je réserve les lettres capitales pour désigner les sommes partielles des séries dont le terme général est la lettre minuscule correspondante.*
2. *Pour désigner la série de terme général u_n, j'utilise -c'est standard- le symbole $\sum$, **sans préciser l'étendue de l'indice**.*

Exercice : Soit $n \in \mathbf{N}$. Explicitez les sommes partielles de rang n des séries suivantes :

1. $\sum k$, $\sum k^2$, $\sum k^3$.
2. $\sum q^k$, où $q \in \mathbf{R}$ est un réel donné.

1. à la place de $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$

2 Opérations algébriques sur les séries

2.a Addition

Etant données deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, on définit leur somme par $\sum u_n + v_n$.

2.b Multiplication externe

Etant donnés une série $\sum u_n$, et un scalaire $\lambda \in \mathbf{R}$ on définit le produit $\lambda \sum u_n$ comme $\sum \lambda . u_n$.

Remarque : Bien entendu, la somme des séries est commutative et possède un élément neutre [2] tel que toute série possède un opposé. On résume ces propriétés en disant que l'ensemble des séries numériques muni de cette addition est un groupe commutatif. De plus la multiplication vérifie les propriétés de compatibilité usuelle vis à vis de l'addition :

$$\boxed{\text{L'ensemble des séries est un } \textbf{espace vectoriel} \text{ sur } \mathbf{R}.}$$

2.c Produit de convolution

Etant données deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, on souhaite définir une série produit $\sum w_n$.
Il est essentiel de remarquer qu'on ne peut adopter la définition naïve $w_n = u_n \times v_n$. En effet, si les suites u et v sont à support finis, par exemple :
Par exemple si $u = (u_0, u_1, u_2, 0, \dots)$ et $v = (v_0, v_1, v_2, 0, \dots)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum u_n \times \sum v_n &= (u_0 + u_1 + u_2) \times (v_0 + v_1 + v_2) \\ &= \mathbf{u_0\ v_0} + \underbrace{u_1\ v_0 + u_1\ v_0} + \underbrace{u_2\ v_0 + \mathbf{u_1\ v_1} + u_0\ v_2} + \underbrace{u_2\ v_1 + u_1\ v_2} + \mathbf{u_2\ v_2}. \end{aligned}$$

La bonne notion pour le produit des séries est le PRODUIT RIGOLO, déjà rencontré en devoir et qui généralise le produit des suites à support fini, c'est-à-dire le produit des polynômes :

Définition : PRODUIT DE CONVOLUTION
*Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ on définit le **produit de convolution** $\sum (u \star v)_n$ des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ par :*

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad (u \star v)_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \times v_{n-k}}$$

NB : l'étude de la convolution des séries n'est pas au programme. Toutefois, je m'en servirai pour démontrer des propriétés importantes sur les séries de référence qui sont elles au programme.

Remarque : un changement d'indice ($k \leftarrow n - k$) montre que le produit de convolution est commutatif.

2. la série nulle

3 Convergence des séries

La définition qui suit donne un sens aux *sommes infinies* comme ***limite*** de *sommes finies* :

Définition : CONVERGENCE DES SÉRIES
Soit $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ est dite } \textbf{convergente} \text{ si la suite des sommes partielles } (U_n) \text{ l'est.}}$$

- *En ce cas,* ***la somme de la série est la limite des sommes partielles*** *: on note*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k}$$

- *Dans le cas contraire, on dit que la série est* ***divergente****.*
- *Lorsque la suite des sommes partielles est divergente vers* $\pm\infty$*, on dit que la série est* ***divergente vers*** $\pm\infty$*.*

COMMENTAIRES : En clair, la série $\sum u_n$ est convergente si la suite des sommes partielles l'est et la somme de la série est la limite des sommes partielles.

Exemple : La série $\sum \frac{1}{k!}$ est convergente et sa somme est la base de l'exponentielle de JOHN NAPIER :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e}$$

Exercice : Reprenons l'étude des séries de l'*Exercice* précédent.

1. Montrez que les séries $\sum k$, $\sum k^2$, $\sum k^3$ sont divergentes vers $+\infty$.

2. Montrez que la série de terme général $(1/2)^k$ est convergente et précisez sa somme.

Il découle de la définition de la notion de convergence d'une série, deux conséquences fondamentales :

Conséquence 1 : une **série** étant convergente *si et seulement si* la **suite** des sommes partielles est convergente. Il en résulte que **tous les théorèmes sur les suites peuvent se traduire en des énoncés sur les séries**. Il suffit d'appliquer ces résultats à la suite des ommes partielles.

Exercice : CONVERGENCE DE LA SÉRIE HARMONIQUE ALTÉRNÉE
Considérons la série dite **Série harmonique alternée**

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

Notons pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ la somme partielle de rang n de cette série.

1. Démontrez que les suites extraites $(S_{2n})_{n\in\mathbf{N}^\star}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes.

2. En déduire que la série harmonique alternée est convergente.

Conséquence 2 : Inversement, on peut toujours ramener l'étude d'une suite $(a_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, à l'étude d'une série en procédant de la manière suivante :
Posons pour $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_n = a_n - a_{n-1}$. On vérifie aisément par *télescopage* que

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad U_n = a_n - a_0$$

De sorte que la série $\sum u_n$ et la suite (a_n) sont de même nature, c'est-à-dire toutes deux convergentes ou bien toutes deux divergentes et le cas échéant

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} a_n - a_0}$$

Exercice : En utilisant un *télescopage* démontrez que les séries
$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} \text{ et } \sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$$
sont convergentes et déterminez leurs sommes.

Cet exercice est un cas particulier pour lequel on sait calculer la somme de la série. Mais, en général il est difficile de deviner le candidat limite des sommes partielles. Par exemple, la série harmonique alternée converge vers $-\ln 2$. Le moins que l'on puisse dire c'est qu'*a priori*, cela ne saute pas aux yeux !
Même lorsqu'on sait que la série $\sum u_n$ converge, il n'est pas plus facile deviner sa somme. Pour cette raison, nous avons besoin de connaître des valeurs approchées de cette somme :

Définition -Proposition — RESTES D'UNE SÉRIE CONVERGENTE
Soit $\sum u_n$ une série **convergente**. On définit pour tout entier $p \in \mathbf{N}$ **le reste d'ordre** p de la série $\sum u_n$ par : $R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$ de sorte que :

$$\boxed{\forall p \in \mathbf{N}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = U_p + R_p}$$

De plus, la suite $(R_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est **convergente de limite nulle**.

COMMENTAIRES : en d'autres termes , si $\sum u_n$ est une série convergente, de somme σ, U_p est une **approximation** de σ à R_p près. Il sera donc particulièrement utile de connaître une estimation du reste, aussi fine que possible.

Démonstration $\triangledown$
Notons $\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, de sorte que $\lim_{n\to+\infty} U_n = \sigma$.

Montrons tout d'abord que pour tout entier $p \in \mathbf{N}$, $\sigma = U_p + R_p$:
Soit $p \in \mathbf{N}$, fixé et $m \in \mathbf{N}$, $m \geq p$. Par associativité de l'addition dans $\mathbf{R}$, il vient

$$\sum_{k=0}^{m} u_k = \sum_{k=0}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{m} u_k$$

Autrement dit

$$\sum_{k=p+1}^{m} u_k = U_m - U_p$$

Or la suite $(U_m)_{m\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite σ. Par opérations algébriques sur les suites convergentes, j'en déduis en passant à la limite quand m tend vers $+\infty$, que R_p est convergente et

$$R_p = \sigma - U_p,$$

ce qui prouve la première assertion.

D'autre part, la suite (U_p) est convergente de limite σ. Par opérations algébriques, j'en déduis cette fois que $(R_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite 0. ▲

Exercice : ESTIMATION DU RESTE DE LA SÉRIE HARMONIQUE ALTERNÉE
Reprenons la série harmonique alternée définie dans le précédent *Exercice*. On note R_p le reste d'ordre p de cette série convergente.

1. Démontrez que pour tout entier $p \in \mathbf{N}^\star$, $|R_p| \leq \dfrac{1}{p+1}$

2. Comment suffit-il de choisir l'entier p pour que S_p constitue une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ à 10^{-3} près ?

3.a Opérations algébriques sur les séries convergentes

Théorème 27.1.— Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries numériques et $\lambda \in \mathbf{R}$ un réel.

1. Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge.

2. Si $\sum u_n$ converge, alors $\lambda \sum u_n$ converge et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n}$$

3. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ est convergente et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n}$$

4. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

Remarques :

1. Lorsque les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien dire de leur somme.

2. Les propriétés 2. et 3. ci-dessus montrent que l'ensemble des séries convergentes est stable par combinaisons linéaires : on dit que c'est un **sous-espace vectoriel** de l'ensemble des séries.

3. En général, le produit de convolution de deux séries convergentes, n'est pas convergent.

Démonstration $\triangledown$

Notons (U_n) et (V_n) les suites des sommes partielles associées aux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

1. Soit $C = \sum_{k=0}^{n_0-1} \in \mathbf{R}$. Alors $\forall n \geq n_0$, $\sum_{k=n_0}^{n} u_k = U_n - C$. Le résultat découle des propriétés algébriques des suites convergentes.

2. $\forall n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \lambda u_k = \lambda U_n$. Le résultat découle des propriétés algébriques des suites convergentes.

3. $\forall n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k + v_k = \lambda U_n + V_n$. Le résultat découle des propriétés algébriques des suites convergentes.

4. $\forall n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k + v_k = \lambda U_n + V_n$. Le résultat découle des propriétés algébriques des suites convergentes. $\blacktriangle$

4 Condition nécessaire de convergence

La notion de convergence d'une suite est une propriété existentielle : il faut d'abord trouver le candidat limite ℓ puis démontrer que la suite est convergente de limite ℓ. Pour les séries, il est souvent difficile de deviner le *candidat limite* des sommes partielles. C'est pourquoi nous insistons sur les critères permettant de prouver la convergence d'une série sans connaître *a priori* la limite éventuelle. Nous verrons au **Chapitre Intégrale des fonctions continues sur un segment** d'autres résultats concernant les séries, et notamment des moyens efficaces [3] de calculer la somme d'une série convergente.
Le premier résultat en ce sens est une condition nécessaire de convergence de la série.

Théorème 27.2.— CONDITION NÉCESSAIRE DE CONVERGENCE
Soit $\sum\ u_n$ une série numérique.

$$\boxed{\textbf{Si } \sum u_n \text{ converge } \textbf{alors } u_n \text{ est convergente de limite nulle}}$$

COMMENTAIRES : la contraposée est particulièrement efficace pour démontrer la divergence d'une série. Elle s'énonce de la façon suivante :

$$\boxed{\textbf{Si } (u_n) \text{ n'est pas convergente de limite nulle, } \textbf{alors } \sum u_n \text{ est divergente}}$$

Dans ce cas, on dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

Démonstration ▽

Soit $\sum u_n$ une série numérique convergente de somme σ. Par définition cela signifie que la suite des sommes partielles (U_n) est convergente de limite σ. Or pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$

$$u_n = U_n - U_{n-1}$$

Comme la suite (U_{n-1}) est extraite de (U_n), elle est convergente de limite σ. Par opérations algébriques, il s'en suit que (u_n) est convergente de limite 0. ▲

Exemple : La série $\sum \sin n$ est grossièrement divergente.

Remarque : la réciproque du **Théorème** 28.2 est fausse comme le montre l'exemple qui suit.

Exercice : DIVERGENCE DE LA SÉRIE HARMONIQUE

Considérons la série dite **Série harmonique** définie par $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

Notons pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la somme partielle de rang n de cette série.

1. Prouvez pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$ l'inégalité :

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$$

2. En déduire que la série harmonique est divergente. Est-elle grossièrement divergente ?

3. Sommes de RIEMANN, Formule de TAYLOR avec reste intégrale

II Séries à termes positifs

Dans cette section nous nous intéressons au cas particulier **très important** des séries dont le terme général u_n est positif :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \geq 0$$

Comme la nature d'une série ne dépend pas des premiers termes, les résultats de cette partie s'appliquent *mutatis mutandis* aux séries numériques dont le terme général est positif à partir d'un certain rang.

1 Condition nécessaire et suffisante de convergence

Lemme 27.3.— Soit $(u_n) \in \left(\mathbf{R}^+\right)^{\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels **positifs** et (U_n) la suite des sommes partielles définie par : $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

$$\boxed{\text{La suite } (U_n) \text{ est croissante.}}$$

COMMENTAIRES : lorsqu'on sait l'importance de la monotonie pour la convergence des suites, on comprend que ce lemme motive l'étude des séries à termes positifs.

Démonstration ▽
Soit $n \in \mathbf{N}$, alors $U_{+1} - U_n = u_{n+1} \geq 0$. Par conséquent la suite (U_n) est croissante. ▲

Remarque : La réciproque est vraie.

Le **Théorème** 7.40 se traduit en ce contexte de la manière suivante :

Théorème 27.4.— CONVERGENCE DES SÉRIES À TERMES POSITIFS
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On note (U_n) la suite des sommes partielles :

1. $\sum u_n$ est convergente *si et seulement si* (U_n) est majorée.
2. Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_n U_n$.
3. Dans le cas contraire, la suite (U_n) diverge vers $+\infty$, on note $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice : Montrez que la série de terme général $u_n = \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$ est convergente.

2 Comparaison des séries à termes positifs

Théorème 27.5.— Soit $(u, v) \in (\mathbf{R}^{\mathbf{N}})^2$ deux suites réelles à termes positifs. On suppose de plus que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leq u_n \leq v_n$$

- Si la série $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge aussi et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$
- Si la série $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge aussi.

Démonstration ▽
Notons (U_n) et (V_n) les suites des sommes partielles des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Par compatibilité de la relation d'ordre avec l'addition, l'hypothèse entraîne que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq U_n \leq V_n$.

- Si la série $\sum v_n$ converge d'après le théorème ci-dessus, (V_n) est majorée par la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ et par transitivité de l'ordre, il en résulte que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leq U_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Par conséquent la suite (U_n) est majorée et **Théorème** 28.4 permet de conclure à la convergence de la série $\sum u_n$. Finalement, passons à la limite quand n tend vers l'infini dans l'inégalité ci-dessus. Il vient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

- Si la série $\sum u_n$ diverge. D'après le **Théorème** 28.4, cela signifie que (U_n) diverge vers $+\infty$. Par comparaison, il s'en suit que la suite (V_n) est elle aussi divrergente vers $+\infty$.

▲

Exercice : SÉRIES DE RIEMANN DIVERGENTES
Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On considère la **Série de Riemann** définie par

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

Démontrez que pour tout $\alpha \in]-\infty, 1]$, la série ci-dessus diverge.

3 Utilisation d'équivalents

Théorème 27.6.— Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que

$$u_n \sim v_n$$

Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge } \textit{ si et seulement si } \sum v_n \text{ converge.}}$$

COMMENTAIRES : nous avons déjà observé que la relation d'équivalence n'est pas compatible avec l'addition, sauf dans le cas où les suites sont positives...

Démonstration ▽
Par définition de la relation d'équivalence pour les suites, il existe une suite (α_n) convergente de limite 1 telle que $\forall n \in \mathbf{N}, v_n = \alpha_n \times u_n$. Comme α est convergente de limite 1, il existe un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ à partir duquel, $1/2 \leq \alpha_n \leq 3/2\alpha_n$. La suite u étant positive, il découle de la compatibilité de l'ordre avec la multiplication que pour tout entier $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{2}u_n \leq v_n \leq \frac{3}{2}u_n$$

Il en résulte aisément que les suites partielles U_n et V_n sont simultanément majorées ou simultanément non majorées.▲

Exercice : Etudiez la nature des séries $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + u_n)$ lorsque :

1. u_n est définie pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$ par $u_n = \frac{1}{n}$.
2. u_n est définie pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$ par $u_n = \frac{n+2}{n\,2^n}$.

III Séries absolument convergentes

1 Définition

Définition : *Soit $\sum u_n$ une série numérique. On dit que $\sum u_n$ est* ***absolument convergente*** *si la série $\sum |u_n|$ est convergente.*

Les techniques importantes développées au paragraphe précédent ne s'appliquent qu'aux séries à termes positifs. La convergence absolue permet de ramener l'étude de la nature d'une série à termes quelconques (signe non constant) à celle d'une série à termes positifs.

2 Condition suffisante de convergence

Théorème 27.7.— CONDITION SUFFISANTE DE CONVERGENCE
Soit $\sum u_n$ une série numérique.

$$\boxed{\textbf{Si } \sum u_n \text{ est absolument convergente } \textbf{alors } \sum u_n \text{ est convergente,}}$$

et dans ce cas,

$$\boxed{\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|}$$

En pratique : si vous devez étudier une série à termes quelconques, vous pouvez commencer par étudier la nature de la série des valeurs absolues qui est à termes positifs !

Démonstration ▽
Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Soit $n \in \mathbf{N}$, posons $u_n^+ = \max\{u_n, 0\}$ et $u_n^- = \max\{-u_n, 0\}$, de sorte que u_n^+ et u_n^- sont tous deux positifs et

$$\begin{cases} u_n = u_n^+ - u_n^- \\ |u_n| = u_n^+ + u_n^- \end{cases}$$

Comme $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$, il découle du **Théorème** 28.5 que les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont convergentes . Il en résulte alors par opérations algébriques sur les séries convergentes que la série $\sum u_n$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^-$$

D'après l'inégalité triangulaire, il vient finalement :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^- = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

▲

Exercice : Etudiez la nature de la série de terme général $\dfrac{(2\cos n)^n}{5^n}$

Remarque : La réciproque est fausse. Par exemple, la **série harmonique alternée** $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais non absolument convergente.

Exercice : Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Montrez que $\sum u_n^2$ est convergente.

3 Modification de l'ordre des termes

Nous sommes tellement habitués à la commutativité de l'addition, qu'il nous paraît *a priori* impossible de modifier la nature d'une série, ou pire encore de modifier la valeur de la somme d'une série convergente en changeant l'ordre de sommation. Cependant, de tels exemples *pathologiques* existent dans la nature !!

Exemple : Considérons par exemple la série harmonique alternée :

$$A = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \cdots$$

Nous modifions ensuite l'ordre des termes de cette suite en changeant la *fréquence* des termes de rangs pairs et impairs

$$\begin{aligned} B &= -1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{1 nb pair}} - \frac{1}{3} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}_{\text{2 nb pairs}} - \frac{1}{5} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}}_{\text{3 nb pairs}} - \frac{1}{7} + \cdots \\ &= -1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{7}\right) + \cdots \end{aligned}$$

Notons v_n le terme général de cette nouvelle série, obtenue par réarrangement des termes de la série initiale :

$$v = \left(-1\,, \frac{1}{2}\,, -\frac{1}{3}\,, \frac{1}{4}\,, \frac{1}{6}\,, -\frac{1}{5}\,, \frac{1}{8}\,, \frac{1}{10}\,, \frac{1}{12}\,, -\frac{1}{7}\,, \dots\right)$$

Notons $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ la somme partielle de rang n de la série $\sum v_n$ et considérons la suite extraite $(V_{\frac{(n+1)\ (n+2)}{2}})$ qui est constitutée de $n+1$ *groupements de* termes de la forme

$$T_k = \frac{1}{k(k-1)+2} + \frac{1}{k(k-1)+4} + \frac{1}{k(k-1)+6} + \cdots + \frac{1}{k(k-1)+2k} - \frac{1}{2k+1} \qquad \text{pour } k \geq 1$$

Autrement dit, en notant $T_0 = -1$, nous pouvons écrire pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_{\frac{(n+1)\ (n+2)}{2}} = T_0 + \sum_{k=1}^{n} T_k$$

Or, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$, on vérifie aisément que

$$T_k \geq \frac{k}{k^2+k} - \frac{1}{2k+1} = \frac{k}{(k+1)\ (2k+1)} \sim \frac{1}{2k}$$

Par conséquent, j'en déduis que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$

$$V_{\frac{(n+1)\ (n+2)}{2}} = \sum_{k=0}^{n} T_k \geq -1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)\ (2k+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Ainsi, une suite extraite de (V_n) est **divergente**. D'après la **Proposition** concernant les suites extraites d'une suite convergente, ceci suffit pour garantir que la suite (V_n) est divergente. Autrement dit la série $\sum v_n$ diverge ! *Spectaculaire isn't it ?*

Il est important de remarquer que dans l'exemple ci-dessus, la série initiale est convergente mais non absolument convergente. Précisément l'objet de ce paragraphe est de montrer qu'il n'existe pas de tels exemples *pathologiques* parmi les séries absolument convergentes. Ce résultat très utile en probabilités est au programme, mais la démonstration doit être admise. C'est pourquoi, en première lecture, vous pouvez *zapper* la preuve.

Définition : *Une série $\sum u_n$ est dite* ***commutativement convergente*** *lorsque*

- *elle est convergente de somme σ et*
- *pour toute bijection $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, la série $\sum u_{\varphi(n)}$ est convergente de somme σ.*

COMMENTAIRES : en clair une série est commutativement convergente si elle converge vers la même somme, quel que soit l'ordre dans lequel on effectue les sommes partielles.

Proposition 27.8.— Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

Si $\sum u_n$ est convergente, **alors** $\sum u_n$ est commutativement convergente.

Démonstration $\triangledown$

Soit $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une bijection. Notons pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

• Montrons que la série $\sum v_n$ converge. Pour cela, d'après le **Théorème** 28.4, il suffit de majorer les sommes partielles $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par une constante M (indépendante de n).

Par hypothèse, la série $\sum u_n$ converge. Notons $M = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. Le sous-ensemble $\varphi^{-1}([\![0, n]\!])$ est une partie finie (de cardinal $n+1$) de $\mathbf{N}$. Par conséquent, d'après la **Proposition** 4.a, elle est majorée. Elle admet donc un plus grand élément. Notons

$$n_0 = \max \varphi^{-1}([\![0, n]\!])$$

Les termes de la suite u étant positifs, il s'en suit que

$$\sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{j=0}^{n_0} u_j = U_{n_0}$$

Comme $M = \sup_n U_n$, il en résulte que $\sum_{k=0}^{n} v_k \leq M$.

• Montrons que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ ont même somme. Notons $N = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. D'après le premier •, nous savons que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad V_n \leq M$$

Comme de plus la suite (V_n) est convergente de limite N, il en découle par passage à la limite dans une inégalité que

$$N \leq M$$

De la même manière, en remarquant que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $u_n = v_{\varphi^{-1}(n)}$, on montre que

$$M \leq N$$

Ainsi, $M = N$, c'est-à-dire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. ▲

Théorème 27.9.— Soit $\sum u_n$ une série numérique.

Si $\sum u_n$ est absolument convergente **alors** elle est commutativement convergente.

Démonstration $\triangledown$

Supposons que la série $\sum u_n$ soit absolument convergente. Notons pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $u_n^+ = \max\{u_n, 0\}$ et $u_n^- = \max\{-u_n, 0\}$ les parties positives et négatives de u_n, de sorte que :

$$\begin{cases} u_n = u_n^+ - u_n^- \\ |u_n| = u_n^+ + u_n^- \end{cases}$$

D'après le **Théorème** 28.5, je déduis des inégalités $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ que les séries à termes positifs $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont convergentes. D'après la **Proposition** précédente, elles sont donc commutativement convergentes .

Montrons à présent que $\sum u_n$ est commutativement convergente. Pour ce faire, considérons une bijection $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ et notons pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Décomposons v_n en parties positives et négatives : $v_n = v_n^+ - v_n^-$. Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n^\pm = u_{\varphi(n)}^\pm$, les séries $\sum v_n^+$ et $\sum v_n^-$ sont des séries obtenues par réarrangement des termes à partir des séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$. Ces dernières étant commutativement convergentes. Les séries $\sum v_n^+$ et $\sum v_n^-$ sont convergentes de sommes respectives $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^-$. Par opérations algébriques, il en résulte non seulement que $\sum v_n$ est convergente de même somme que $\sum u_n$, mais elle est même absolument convergente. ▲

4 Convergence des produits de convolution

NB : Ce paragraphe est hors-programme, mais le résultat principal sera utilisé pour l'étude de séries de référence : série exponentielle et formule du binôme négatif.

La question de la convergence des produits de convolution a été laissée en suspens car le produit de convolution de deux séries convergentes n'est pas nécessairement convergent. Là encore, le bon cas est celui des séries absolument convergentes. Pour démontrer cette assertion, je commence par envisager le cas des séries à termes positifs :

Proposition 27.10.— Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes positifs. On définit la convolée $w = u \star v$ par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \times v_{n-k}$$

Alors $\sum w_n$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Démonstration ▽
Notons pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ comme précédemment U_n, V_n et W_n les sommes partielles de rang n des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$.

- Nous allons prouver

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad W_n \leq U_n \times V_n \leq W_{2n}} \tag{27.1}$$

Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. Intéressons-nous tout d'abord à W_n.

$$\begin{aligned} W_n &= \sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} u_i \times v_{k-i} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n} u_i \times v_{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} u_i \times v_j = \sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2 \\ 0\leq i+j\leq n}} u_i \times v_j. \end{aligned}$$

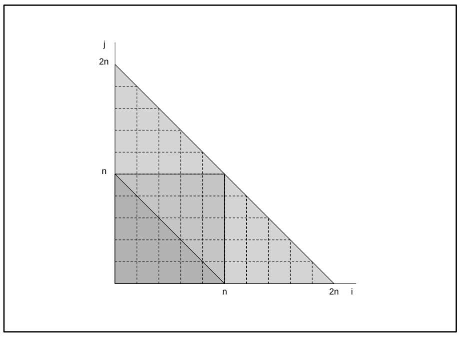
Ainsi, W_n est la somme de tous les produits $u_i \times v_j$, pour lesquels $0 \leq i, j \leq n$ **et** $0 \leq i + j \leq n$.
De même, W_{2n} est la somme de tous les produits $u_i \times v_j$, pour lesquels $0 \leq i, j \leq 2n$ **et** $0 \leq i + j \leq 2n$.

A présent, intéressons-nous à $U_n \times V_n$:

$$\begin{aligned} U_n \times V_n &= \left(\sum_{i=0}^{n} u_i\right) \times \left(\sum_{j=0}^{n} v_j\right) \\ &= \sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} u_i \times v_j. \end{aligned}$$

Ainsi, $U_n \times V_n$ est la somme de tous les produits $u_i \times v_j$, pour lesquels $0 \leq i, j \leq n$.

Le schéma suivant représente les différents ensembles d'indices qui entrent en jeu :



Comme tous les termes en présence sont positifs, nous en déduisons aisément l'encadrement (28.1).

- A présent, comme par hypothèse les séries à termes positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, il découle facilement de l'encadrement (28.1) que la suite des sommes partielles (W_n) is also *bounded from above*. La série *convolée* $\sum w_n$ est donc convergente. Par passage à la limite dans l'encadrement (28.1) j'en déduis que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

D'où l'égalité désirée.

▲

Le cas du produit de convolution de deux séries absolument convergentes s'en déduit aisément :

Théorème 27.11.— Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes. On note comme ci-dessus $w = u \star v$ la convolée de u par v.
Alors la série $\sum w_n$ est absolument convergente[4] et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)}$$

Démonstration ▽
Afin d'alléger l'écriture, convenons de noter pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $a_n = |u_n|$, $b_n = |v_n|$ et $c_n = (a \star b)_n$ pour les valeurs absolues des termes généraux, et A_n, B_n, C_n les sommes partielles de rang n correspondantes.
Remarquons tout d'abord que l'hypothèse de convergence absolue des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ nous permet d'appliquer la **Proposition** précédente aux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$. En particulier, nous en déduisons que $\lim_{n\to+\infty} A_n \times B_n - C_n = 0$.
D'autre part, si $n \in \mathbf{N}$ est fixé, notons[5] $T_n = \{(i,j) | 0 \leq i,j \leq n; i+j > n\}$. Nous déduisons de l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |U_n \times V_n - W_n| &= \left| \sum_{(i,j)\in T_n} u_i \times v_j \right| \\ &\leq \sum_{(i,j)\in T_n} a_i \times b_j \\ &= A_n \times B_n - C_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Par le théorème de convergence par comparaison, il s'en suit que $(U_n \times V_n - W_n)$ converge aussi vers 0. Comme par hypothèse les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, les suites (U_n) et (V_n) le sont aussi. Par opérations algébriques, j'en déduis finalement que (W_n) converge vers le produit des sommes de $\sum u_n$ et $\sum v_n$, c'est-à-dire précisément

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

▲

5. reportez-vous à la figure page précédente

IV Séries de référence

L'étude de la nature d'une série et le calcul de sa somme lorsqu'elle converge, se déroule en pratique par l'étude de la série des valeurs absolues *via* le **Théorème** 28.7. Cette dernière étant bien entendu à termes positifs, on l'étudie par comparaison, ou grâce à la règle des équivalents. L'efficacité de cette démarche repose sur la connaissance de certaines séries de référence que nous allons étudier dans cette dernière partie du chapitre.
Les démonstrations *usuelles* de ces résultats reposent sur la notion d'intégrales que ce soit *via* les FORMULES DE TAYLOR avec reste intégrale ou bien les théorèmes de COMPARAISON SÉRIES-INTÉGRALES.
Comme nous n'avons pas encore étudié la notion d'intégrale, je donne ci-dessous des preuves plus élémentaires.
Les preuves usuelles feront très certainement l'objet d'un prochain DEVOIR LIBRE !

1 Séries géométriques & dérivées

Définition : *On appelle **série géométrique** une série de terme général x^n, où $x \in \mathbf{R}$ est un réel fixé.*

Lors de notre étude des suites géométriques, nous avons déjà calculé les sommes partielles de rang n d'une telle série. Elles sont données par la formule de *qui-vous-savez* :

Lemme 27.12.— Soient $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ un réel différent de 1 et $n \in \mathbf{N}$ un entier. La somme partielle de rang n de la série $\sum x^n$ est :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

On en déduit aisément le :

Théorème 27.13.— SÉRIES GÉOMÉTRIQUES
Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\boxed{\text{La série géométrique } \sum x^n \text{ est convergente } \textit{si et seulement si } |x| < 1}$$

De plus, si $|x| < 1$, la série $\sum x^n$ est absolument convergente et sa somme est

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}}$$

Remarque : Pour tout nombre réel $x \in]-1, 1[$, la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est bien définie. La fonction

$$\begin{array}{rccl} g : &]-1,1[& \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \end{array}$$

coïncide avec la fonction

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbf{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{1-x} \end{array}$$

sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

Démonstration $\triangledown$

- **la condition est nécessaire :** supposons que la série $\sum x^n$ converge.
  D'après le **Théorème** 28.2, le terme général de la série est convergent de limite 0. D'après le **Théorème**12.13 ceci n'est possible qu'à la condition que $|x| < 1$.
- **la condition est suffisante :** supposons que $|x| < 1$. Daprès le **Lemme** ci-dessus, la somme partielle de rang n, S_n est donnée par

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Comme par hypothèse $|x| < 1$, il en résulte par opérations algébriques que (S_n) est convergente de limite $\frac{1}{1-x}$.

- **la série converge absolument :** Soit $x \in]-1, 1[$. Alors $|x| \in]-1, 1[$. D'après ce qui précède, il en résulte que la série $\sum |x|^n$ converge, i.e. la série $\sum x^n$ est absolument convergente. ▲

Théorème 27.14.— Séries géométriques dérivées
Soient $x \in \mathbf{R}$ et $p \in \mathbf{N}$,

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq p} \binom{n}{p} x^{n-p} \text{ est convergente } \textit{si et seulement si } |x| < 1}$$

De plus, si $|x| < 1$, cette série est absolument convergente et sa somme est

$$\boxed{\sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^{n-p} = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}}$$

Démonstration ▽

- **la condition est nécessaire :** supposons que la série converge.
  D'après le **Théorème** 28.2, le terme général de la série est convergent de limite 0. D'après le **Théorème**12.13 ceci n'est possible qu'à la condition que $|x| < 1$.

- **la condition est suffisante :** Montrons par récurrence que pour tout entier $p \in \mathbf{N}$ la série $\sum_{n \geq p} \binom{n}{p} x^{n-p}$ est absolument convergente de somme :

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^{n-p} = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}$$

Initialisation : lorsque $p = 0$, il s'agit précisément du **Théorème** précédent.

Hérédité : soit $p \in \mathbf{N}$ tel que la série $\sum_{n \geq p} \binom{n}{p} x^{n-p}$ soit absolument convergente de somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{p} x^{n-p} = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}$$

Notons pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \binom{n}{p} x^{n-p}$, $v_n = x^n$ et $w_n = (u \star v)_n$, avec la convention que $u_n = 0$ si $n < p$.

Comme les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, leur produit de convolution est absolument convergent d'après le **Théorème** 28.11 et de somme

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{p} x^{n-p} \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \frac{1}{(1-x)^{p+1}} \times \frac{1}{(1-x)} = \frac{1}{(1-x)^{p+2}}$$

Montrons que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$,

$$(u \star v)_n = \binom{n}{p+1} x^{n-p-1}$$

Par définition du produit de convolution, on a :

$$\begin{aligned} (u \star v)_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \, v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} x^{k-p} \, x^{n-k} = x^{n-p} \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} \\ &= x^{n-p} \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} x^{n-p} \end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum_{n\geq p}\binom{n+1}{p+1}x^{n-p}$ est absolument convergente et de somme $\frac{1}{(1-x)^{p+2}}$. Or

$$\sum_{n=p}^{+\infty}\binom{n+1}{p+1}x^{n-p}=\sum_{n=p+1}\binom{n}{p+1}x^{n-1-p}$$

Par conséquent, la série $\sum_{n\geq p+1}\binom{n}{p+1}x^{n-p-1}$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty}\binom{n}{p+1}x^{n-1-p}=\frac{1}{(1-x)^{p+2}}$$

Conclusion : par récurrence, nous avons prouvé ce que l'on souhaitait démontrer ! ▲

Remarque : Considérons la fonction

$$g\ :\ \begin{array}{rcl}]-1,1[& \rightarrow & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^n \end{array}$$

nous avons déjà observé que cette fonction est bien définie et que pour tout nombre réel $x\in]-1,1[$, $g(x)=\dfrac{1}{1-x}$. D'autre part nous savons que la fonction définie pour tout $x\in]-1,1[$ par $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ est indéfiniment dérivable sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ et que sa dérivée d'ordre p au point $x\in]-1,1[$ est $f^{(p)}(x)=\dfrac{p!}{(1-x)^{p+1}}$
Ainsi pouvons-nous écrire pour tout entier $p\in\mathbf{N}$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)^{(p)}=\frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$$

Dérivons formellement sous le signe $\sum$, nous obtenons :

$$\sum_{n=p}^{+\infty}\frac{n!}{(n-p)!}x^{n-p}=\frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$$

En divisant les deux membres de cette égalité par $p!$, nous retrouvons le résultat du **Théorème**28.14.
Cette approche *formelle* est tout à fait justifiée dans un cadre qui dépasse les limites du programme. Toutefois, elle permet non seulement de comprendre en quoi il s'agit d'une série géométrique dérivée, et donne aussi un moyen rapide de retrouver cette formule si -mais cela ne se peut - vous avez oublié cette jolie formule.

Exercice :

1. Que donne le **Théorème** 28.14 dans les cas $p=0,1$ et 2.
2. Utilisez les résultats précédents pour démontrer que les séries de termes généraux nx^n, n^2x^n sont convergentes si $x\in]-1,1[$ et prouver les identités

$$\sum_{n=0}^{+\infty}n\,x^n=\frac{x}{(1-x)^2}\quad\text{et}\quad\sum_{n=0}^{+\infty}n^2\,x^n=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

2 Séries de Riemann

Définition : Séries de Riemann

*On appelle **série de Riemann** toute série* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^x}$*, où x est un réel donné.*

Remarque : Si x est un réel négatif ou nul, le terme général ne tend pas vers 0, la série de Riemann de t.g. $1/n^x$ diverge grossièrement.

Les seules séries de Riemann digne du nom de ce Grand mathématicien allemand [6]sont donc celles pour lesquelles $x > 0$. Dans ce cas, on peut observer que le terme général forme une suite strictement décroissante convergente vers 0.
Pour l'étudier, nous utiliserons un théorème de *sommation par paquets*, dû à Cauchy [7]

Théorème 27.15.— Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ une suite décroissante de réels positifs.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge } \textit{ si et seulement si } \text{ la série } \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k} \text{ converge.}}$$

Démonstration ▽
Notons pour tous entiers n et k :

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ T_k &= a_1 + 2\ a_2 + 4\ a_4 + \cdots + 2^k\ a_{2^k} \end{aligned}$$

Les sommes partielles de rang n et k de ces deux séries. Comme ces dermières sont à termes positifs, il suffit de démontrer d'après le **Théorème** 28.4 que les suites (S_n) et (T_k) sont simultanément bornées ou non bornées.
Ceci découle des deux inégalités suivantes :

- Soit $(n,k)\in\mathbf{N}^2$ tels que $n\leq 2^k-1$. Par les propriétés de positivité et de monotonie de la suite a_j), il vient :

$$\begin{aligned} S_n &\leq a_1 + \underbrace{a_2+a_3} + \underbrace{a_4+a_5+a_6+a_7+a_8} + \cdots + \underbrace{a_{2^{k-1}} + \cdots + a_{2^k-1}} \\ &\leq a_1 + 2\ a_2 + 4\ a_4 + \cdots + 2^k\ a_{2^k} \\ &\leq T_k. \end{aligned}$$

Par conséquent si (T_k) est majorée, (S_n) l'est aussi.

- Soit $(n,k)\in\mathbf{N}^2$ tels que $n\geq 2^k$. Par les propriétés de positivité et de monotonie de la suite a_j), il vient :

$$\begin{aligned} S_n &\geq a_1 + a_2 + \underbrace{a_3+a_4} + \underbrace{a_5+a_6+a_7+a_8} + \cdots + \underbrace{a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}} \\ &\geq a_1 + a_2 + 2\ a_4 + 4\ a_8 + \cdots + 2^{k-1}\ a_{2^k} \\ &\geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2\ a_4 + 4\ a_8 + \cdots + 2^{k-1}\ a_{2^k} \\ &\geq \frac{1}{2}\ T_k \end{aligned}$$

Par conséquent si (S_n) est majorée, (T_k) l'est aussi. ▲

Théorème 27.16.— Convergence des séries de Riemann
Soit $x\in\mathbf{R}$ un réel donné.

$$\boxed{\text{La série de Riemann } \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^x} \text{ converge } \textit{si et seulement si } x > 1}$$

6. L'œuvre de Bernhard Riemann (1826-1846) est tout à fait considérable en analyse complexe, analyse harmonique, en géométrie différentielle, en théorie de l'intégration, séries de Fourier, etc...Quel maître !

7. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) c'est énorme ! L'œuvre de Cauchy est fondamentale, en algèbre (des groupes et algèbre linéaires) mais surout en analyse réelle (équations différentielles, suites) et en analyse complexe

Vocabulaire : La fonction $\zeta :]1, +\infty[\to \mathbf{R}$ qui à tout nombre réel x associe $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est bien définie. On l'appelle la **fonction ζ de Riemann**.

Démonstration $\triangledown$
Nous avons déjà remarqué que si x est négatif ou nul, la série de Riemann de terme général $1/n^x$ diverge grossièrement. Nous supposerons donc sans perte de généralité que $x > 0$. Ainsi, le **Théorème** précédent s'applique. Etudions donc la série

$$\sum 2^k \frac{1}{(2^k)^x}$$

Or pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$2^k \frac{1}{(2^k)^x} = \left(2^k\right)^{1-x} = \left(2^{1-x}\right)^k,$$

cette série est donc la série géométrique de raison 2^{1-x}.
D'après le **Théorème** 28.13, elle converge *si et seulement si* 2^{1-x}, c'est-à-dire précisément lorsque $x > 1$. ▲

Le corollaire suivant est très utile en pratique

Proposition 27.17.— Règle $n^\alpha u_n$

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

$$\boxed{\textbf{S'}\text{il existe } \alpha > 1 \text{ tel que } u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \ \textbf{alors} \sum u_n \text{ converge}}$$

Démonstration $\triangledown$
Supposons qu'il existe $\alpha > 1$ tel que $u_n = \mathcal{O}(1/n^\alpha)$. Par définition, cela signifie qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \qquad u_n \leq \frac{A}{n^\alpha}$$

Comme d'après le **Théorème** 28.16, $1/n^\alpha$ est le terme général d'une série de Riemann convergente, le **Théorème** 28.5 permet de conclure par comparaison à la convergence de la série $\sum u_n$. ▲

3 Série exponentielle

Une autre application des produits de convolution concerne les séries exponentielles.

Définition : *On appelle **série exponentielle** toute série de terme général* $\frac{x^n}{n!}$, *où* x *est un réel donné.*

Exemple : Prenant $x = 1$, nous obtenons la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

Comme nous l'avons montré au **Chapitre 8** en utilisant des suites adjacentes, cette série est convergente de somme e, base des logarithmes de NÉPER.

Théorème 27.18.— SÉRIES EXPONENTIELLES

Soit $x \in \mathbf{R}$ quelconque, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente et

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$$

Démonstration $\triangledown$

- **Convergence absolue**
  Pour démontrer la convergence absolue , nous utilisons la règle $n^\alpha u_n$:
  Soit $x \in \mathbf{R}$ fixé. Alors
  $$n^2 \left(\frac{|x|^n}{n!}\right) = \frac{n^2}{2^n} \times \frac{(2|x|)^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
  D'après la **Proposition** , il s'en suit que la série $\sum |x|/n!$ converge.
- **Calcul de la somme**
  Comme la série $\sum x/n!$ est convergente pour tout $x \in \mathbf{R}$, elle définit une fonction :
  $$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \end{array}$$
  Nous allons démontrer que f est la fonction exponentielle. Pour cela, il suffit [8] de vérifier que
  - $f(1) = e$
  - $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) \times f(y)$

  - D'après l'exemple ci-dessus, la première condition est vérifiée.
  - Montrons que $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) \times f(y)$.
    Notons pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $u_n = x^n/n!$, $v_n = y^n/n!$ et $w_n = (u \star v)_n$. Comme les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, le **Théorème** 28.11 s'applique. Par conséquent $\sum w_n$ converge et sa somme est précisément le produit $f(x) \times f(y)$. Explicitons w_n. Par définition du produit de convolution, nous avons :
    $$\begin{aligned} w_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \times v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \times \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \times y^{n-k} \\ &= \frac{(x+y)^n}{n!} \end{aligned}$$

8. ces deux propriétés caractérisent la fonction exp, ainsi que j'aurais souhaité vous le faire démontrer en DEVOIR SURVEILLÉ...

Par conséquent la série $\sum \frac{(x+y)^n}{n!}$ est convergente -ce que nous savions déjà - et sa somme est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}\right)$$

Autrement dit,
$$f(x+y) = f(x) \times f(y).$$
▲

V How To

Comment déterminer la nature d'une série

Avant de s'enflammer, commencez par vérifier si le terme général u_n tend vers 0. En général, un simple coup d'œil suffit !

0.a lorsque la série est à termes positifs

- en ce cas, d'après le **Théorème** 28.4, il vous suffit de montrer que les sommes partielles (U_n) sont majorées par une constante inépendante de n.
- si vous reconnaissez une série de référence (séries géométriques, de Riemann ou série exponentielle), les résultats sont dans le cours.
- si vous voyez comment *découper* le terme général comme combinaison linéaire de termes généraux de série de référence. En ce cas le **Théorème** 28.1 permet souvent de conclure.
- sinon, vous pouvez rechercher un équivalent le plus simple possible de votre terme général :
  - — vous tombez sur une série de référence, c'est parfait, vous savez faire
  - — vous pouvez comparer cet équivalent à celui d'une série de référence : le **Théorème** de convergence par comparaison vous permet de conclure.

Remarque : Bien entendu, les résultats démontrés pour les séries à termes positifs, s'appliquent *mutatis mutandis* aux séries à termes négatifs, ou posistifs (resp. négatifs) à partir d'un certain rang.

0.b lorsque les termes de la séries changent sauvagement de signe

- vous pouvez, dans certains cas, expliciter la suite (U_n) des sommes partielles. Il s'agit alors de mettre en œuvre le cours sur les suites afin de déterminer le comportement asymptotique de la suite (U_n)
- Dans la plupart des cas, vous étudiez la convergence de la série des valeurs absolues $\sum |u_n|$: si elle est convergente, alors d'après le **Théorème** 28.7, $\sum u_n$ l'est aussi.

Comment déterminer la somme d'une série convergente

Dans ce chapitre, nous n'avons que quelques techniques élémentaires pour calculer la somme d'une série convergente. Par la suite viendront se rajouter deux techniques puissantes mettant en jeu la notion d'intégrale : les **sommes de Riemann** et les **formules de Taylor** avec reste intégrale.

- vous connaissez les sommes des séries géométriques (et les séries dérivées) ainsi que des séries exponentielles. Si le terme général *ressemble* à ceux des séries de référence, procédez par opérations algébriques : sommes ou combinaison linéaire.
- vous pouvez étudier la suite des sommes partielles : il est parfois possible de simplifier l'expression de ces sommes partielles et d'en déduire leur limite. L'exemple le plus courant est celui des série dont le terme général est de la forme $u_n = a_n - a_{n-1}$. En ce cas, un *télescopage* montre que $U_n = a_n - a_0$, ainsi que nous l'avons déjà observé. En ce cas, la série converge *ssi* la suite (a_n) converge. La somme de la série est alors $\lim_{n\to+\infty} a_n - a_0$.