TECHNIQUES & MÉTHODES S20

NB : cette fiche reprend les techniques nécessaires **minimales** ; elle ne constitue donc pas un objectif, mais un prérequis !

■■■ Formules de Taylor avec reste intégrale et Taylor-Lagrange

Les formules de Taylor avec reste intégrale et Taylor-Lagrange généralisent les Théorèmes des accroissements finis : elles sont donc particulièrement utiles pour démontrer des inégalités ou des encadrements.

Comment encadrer f par ses polynômes de Taylor

Pour encadrer $f(x) - T_n(x)$, vous pouvez utiliser l'expression sous forme d'une intégrale du reste $R_n(x)$ à l'ordre n :

$$R_n(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t) \, \frac{(x-t)^n}{n!} \, dt,$$

Puis on trouve un encadrement de ce reste en utilisant la croissance de l'intégrale.
Warning : prenez garde de mettre les bornes de l'intégrale dans le *bon sens* !

Comment démontrer la convergence d'une série

Il ne vous a pas échappé que les polynômes de Taylor de f en un point a forment la suite des sommes partielles de la série – dite de Taylor :

$$\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \, (x-a)^n$$

Pour démontrer le cas échéant la convergence d'une telle série, on peut utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Exemple : la série exponentielle

■■■ Formules de Taylor-Young et développements limités

Les développements limités constituent l'outil le plus performant pour le calcul des limites. Ils sont donc très fréquemment utilisés pour l'étude de la continuité, de la dérivabilité ou des branches infinies des fonctions.

Comment déterminer un développement limité

Il est souvent préférable de calculer un développement limité au voisinage de 0. Les changements de variable $x = a + t$ ou $x = 1/t$ permettent de s'y ramener.

En ce cas

- vous connaissez les développements limités des fonctions usuelles.
- vous pouvez procéder par opérations : somme, produit, composition.

Dans tous les cas pratiques

Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de a, **alors** la formule de Taylor-Young montre que f possède un développement limité à l'ordre n en a :

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \, (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \, (x-a)^n + o\big((x-a)^n\big).$$

Quand utiliser un développement limité

Un développement limité à l'ordre n d'une fonction **au voisinage** d'un point $a \in \bar{\mathbb{R}}$ permet de remplacer f par un polynôme de degré inférieur ou égal à n *modulo* un reste en $o(x^n)$.
Les développements limités permettent donc une étude *locale*. Voici les applications les plus courantes des développements limités :

- le calcul des limites des fonctions (étude de la continuité, de la dérivabilité, ...)
- le calcul d'un équivalent,
- déterminer une tangente et sa position par rapport au graphe,
- l'étude des branches infinies et, le cas échéant, position du graphe et de son asymptote,
- calcul des limites de suites de la forme $u_n = f(n)$ –on utilise un développemnt limité de f au voisinage de $+\infty$,

Comment calculer la limite d'une fonction

Lorsqu'on vous demande d'étudier une limite, il y a fort à parier qu'il s'agisse d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, ou encore 1^∞. Pour *lever cette indétermination*, les développements limités sont encore plus efficaces que les équivalents. De plus–comme nous l'avons observé– le calcul des limites par développement limité est plus fluide que par équivalence : il s'agit d'**égalité** entre fonctions, il n'y a donc aucune incompatibilité avec la somme, le produit, la composition...

Concrètement, vous **remplacez les fonctions en jeu par leur développements limités au point considéré**. Mais avant cela, il est nécessaire de déterminer l'ordre des développements limités.

Remarque : Si, après l'introduction des développements limités, vous tombez sur une forme indéterminée, il faut augmenter l'ordre de ces derniers.