Chapitre 18

Systèmes d'équations linéaires

Sommaire

I Systèmes d'équations linéaires 437
1 Définitions-exemples 437
2 Systèmes équivalents 437
II Résolutions de systèmes particuliers 439
1 Systèmes diagonaux 439
2 Systèmes triangulaires 439
3 Systèmes échelonnés 442
III Résolution des systèmes d'équations linéaires, cas général 444
1 La méthode du pivot de Gauss 444
2 Algorithme de Gauss 446
3 Structure de l'ensemble des solutions 447
IV Systèmes de Cramer 448
1 Définition 448
2 Caractérisations des systèmes de Cramer 449

OBJECTIFS

- ▷ connaître la résolution des systèmes échelonnés
- ▷ mettre en œuvre la méthode du pivot de Gauss
- ▷ connaître les différentes caractérisations des systèmes de Cramer

Introduction

La notion d'équation a guidé notre démarche en algèbre et en analyse :
– nous avons construit tout d'abord les racines $n^{\text{ièmes}}$ des nombres réels positifs, puis nous avons introduit les nombres complexes pour résoudre les équations polynomiales à une indéterminée ;
– dans le cadre des fonctions continues, nous avons le **Théorème des Valeurs Intermédiaires** pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, ou bien encore l'étude des suites récurrentes pour résoudre l'*équation aux points fixes* de f.

Bref, la notion d'équation est omniprésente en mathématiques.

Ce petit chapitre est notre premier pas en **Algèbre Linéaire**. Le problème est de résoudre, des équations linéaires (*i.e.* polynomiales de degré inférieur ou égal à 1) mettant en jeu plusieurs inconnues. L'objectif est double :
• il s'agit d'une part de mettre en place la **méthode du pivot**- ou méthode d'élimination de Gauss- qui permette de résoudre de façon *algorithmique* les systèmes d'équations linéaires.
• et d'autre part d'introduire quelques idées importantes en l'algèbre linéaire, comme celles de rang et de liberté ...

Dans tout le chapitre, $\mathbf{K}$ désigne le *corps de base*, c'est-à-dire $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Rappels sur les équations du premier degré à une inconnue

Avant d'attaquer les choses sérieuses, rappelez-vous la résolution dans $\mathbf{K}$ de l'équation :

$$\boxed{a\,x = b} \tag{18.1}$$

où a et b sont des nombres *quelconques* de $\mathbf{K}$:

- si $a = 0$, deux cas se présentent :
  - si $b = 0$, alors (18.1) possède une infinité de solutions : plus précisément tout nombre $x \in \mathbf{K}$ est solution de (18.1).
  - si $b \neq 0$, alors (18.1) ne possède aucune solution.
- si $a \neq 0$, (18.1) possède une unique solution : $x = \dfrac{b}{a}$

En particulier, retenez :

Lemme 18.1.—

L'équation (18.1) possède une solution unique *si et seulement si* $a \neq 0$.

I Systèmes d'équations linéaires

1 Définitions-exemples

Définition : *On appelle* ***système d'équations linéaires*** *un système du type :*

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 & & (L_1)\\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 & & (L_2)\\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n & & (L_n) \end{array}\right.$$

- *pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, les nombres $a_{i,j} \in \mathbf{K}$ sont appelés les* ***coefficients*** *du système,*
- *pour $i \in [\![1,n]\!]$ les nombres $b_i \in \mathbf{K}$ forment ce que l'on appelle le* ***second membre,***
- *pour $j \in [\![1,p]\!]$ les x_j sont les* ***inconnues*** *du système.*
- *On dit que (S) est un* ***système de n équations à p inconnues.***

Remarque : Les coefficients $(a_{i,j})$ sont indexés par les couples $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. Le premier indice i est le numéro de la ligne (L_i). Le deuxième indice j repère la colonne, c'est-à-dire l'inconnue devant laquelle le coefficient apparaît.

Exemple :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rrrcr} -2x & -3y & +5z & = -2i & (L_1)\\ x & +4y & -z & = 1 & (L_2)\\ x & -7y & +4z & = 5 & (L_3) \end{array}\right.$$

est un système de 3 équations linéaires : (L_1), (L_2) et (L_3) à 3 inconnues x, y et z.

Définition : *Soit (S) un système de n équations linéaires à p inconnues.*

- *Dans le cas particulier où les b_i sont* ***tous nuls****, on dit que le système S est* ***homogène.***
- *Dans le cas général, on appelle* ***système homogène associé à*** *(S), et on note (S_o), le système de même coefficients que (S) et avec second membre nul.*

Exemple : Reprenons l'exemple ci-dessus, le système homogène associé à (S) est :

$$(S_o)\quad \left\{\begin{array}{rrrc} -2x & -3y & +5z & = 0\\ x & +4y & -z & = 0\\ x & -7y & +4z & = 0 \end{array}\right.$$

Définition : *Soit (S) un système de n équations linéaires à p inconnues.*
Résoudre le système (S) consiste à déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des p-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbf{K}^p$ vérifiant ***simultanément*** *les n équations du système (S).*

- *Un système dont l'ensemble des solutions est vide est dit* ***incompatible.***
- *Un système au moins une solution est dit* ***compatible.***
- *Un système possédant au moins deux solutions est dit* ***indéterminé.***

Remarque : tout système homogène est **compatible**. En effet, le p-uplet $(0, \ldots, 0)$ est toujours solution d'un tel système.

2 Systèmes équivalents

Définition : *Deux systèmes (S_1) et (S_2) sonts dits* ***équivalents*** *s'ils ont le même ensemble de solutions. On note cette relation $(S_1) \iff (S_2)$.*

Remarques :

1. La relation $(S_1) \iff (S_2)$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire reflexive, symétrique et transitive.

2. En conséquence, pour résoudre un système (S), vous pouvez enchaîner les équivalences, tout comme s'il s'agissait d'égalités :

$$(S_1) \iff (S_2) \iff \cdots \iff (S_N),$$

l'ensemble des solutions des systèmes (S_1) et (S_N) sont égaux.

3. Bien entendu, on obtient un système équivalent à (S) en remplaçant l'une quelconque des n équations qui constituent (S) par une équation qui lui est équivalente.

En pratique : pour résoudre un système (S), vous chercherez un système (S') équivalent à (S), le plus simple possible[1].

Précisément, les prochains paragraphes présentent les différentes opérations permettant d'obtenir un système équivalent à (S).

2.a Substitution

La résolution d'un système d'équations linéaires peut s'effectuer par la méthode de *substitution*. Il s'agit tout simplement de résoudre l'une des équations en l'une des inconnues : par exemple (L_n) permet d'exprimer x_p en fonction de $x_1, \dots, x_{p-1}$. On remplace alors x_p par cette expression dans les autres équations.
Considérons par exemple le système 2×2 :

$$\begin{cases} x+y=7 \\ 2x-y=5 \end{cases} \iff \begin{cases} x=7-y \\ 2x-y=5 \end{cases} \iff \begin{cases} x=7-y \\ -3y=-9 \end{cases} \iff \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$$

En général, la méthode de résolution par substitution est assez lourde lorsque le système est de taille *supérieure* à 2×2. Toutefois, cette méthode est incontournable dans le cas des systèmes triangulaires que nous étudions plus loin.

2.b Opérations élémentaires sur les lignes

Proposition 18.2.— Opérations élémentaires sur les lignes
L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions d'un système d'équations linéaires (S) ne change pas si l'on effectue sur les lignes les **opérations élémentaires** suivantes :

- échanger l'ordre des lignes L_i et L_j $\qquad (L_i \leftrightarrow L_j)$,
- multiplier la ligne L_i par une constante non nulle $\lambda_i \in \mathbf{K}^\star$ $\qquad (L_i \leftarrow \lambda_i\, L_i)$,
- ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j $(i \neq j)$ $\qquad (L_i \leftarrow L_i + \lambda_j L_j)$.

A partir de ces opérations élémentaires, nous en déduisons qu'il est toujours possible de

- remplacer L_i par une combinaison linéaire des lignes $\qquad (L_i \leftarrow \sum_{j=1}^{n} \lambda_j L_j$ où $\lambda_i \neq 0)$.

pourvu que le coefficient λ_i de L_i soit non nul.

Exercice : Résoudre les systèmes

$$(S_1) \quad \begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=5 \end{cases} \qquad (S_2) \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y-z=2 \\ x-y-z=-3 \end{cases}$$

Solution ▽

$$(S_1) \iff \left\{\begin{array}{l} x+y=-1 \\ x-y=5 \end{array}\right. \left\|\begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2x=4 \\ 2y=-6 \end{array}\right. \left\|\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1-L_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=-3 \end{array}\right. \left\|\begin{array}{l} L_1 \leftarrow (1/2)L_1 \\ L_2 \leftarrow (1/2)L_2 \end{array}\right.$$

Par conséquent (S_1) *admet pour unique solution le couple* $(2,-3)$. *On note* $\mathcal{S}_1 = \{(2,-3)\}$.

$$(S_2) \iff \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+y-z=2 \\ x-y-z=-3 \end{array}\right. \left\|\begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+y-z=2 \\ 2x=-2 \end{array}\right. \left\|\begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_1+L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y+z=2 \\ y-z=3 \\ x=-1 \end{array}\right. \left\|\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1-(1/2)L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2-(1/2)L_3 \\ L_3 \leftarrow (1/2)L_3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} z=-1/2 \\ y=5/2 \\ x=-1 \end{array}\right. \left\|\begin{array}{l} L_1 \leftarrow (1/2)(L_1-L_2) \\ L_2 \leftarrow (1/2)(L_1+L_2) \\ L_3 \leftarrow (1/2)L_3 \end{array}\right.$$

Ainsi, (S_2) *admet pour unique solution le triplet* $(-1, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$. *On note* $\mathcal{S}_2 = \{(-1, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2})\}$. ▲

[1] c'est-à-dire *diagonal*

II Résolutions de systèmes particuliers

Afin de développer une méthode générale de résolution des systèmes linéaires, nous allons envisager divers cas, de complexité croissante. Commençons naturellement par étudier le cas le plus simple possible : il s'agit des systèmes **diagonaux** de n équations à n inconnues.

1 Systèmes diagonaux

1.a Définition

Définition : *Un système (D) de n équations à n inconnues est dit* ***diagonal*** *lorsque*

$$\big(\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2\big),\quad \big((i\neq j)\Rightarrow a_{i,j}=0\big).$$

En clair (D) s'écrit :

$$(D)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 & & & & & = b_1\\ & \ddots & & & & \vdots\\ & & a_{k,k}x_k & & & = b_k\\ & & & \ddots & & \vdots\\ & & & & a_{n,n}x_n & = b_n \end{cases}$$

Exemples : Deux systèmes diagonaux :

$$\begin{cases} 2x = 1\\ -3y = 2\\ z = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 = 0\\ -9x_2 = 2\\ 7x_3 = -4\\ 0x_4 = 1 \end{cases}$$

1.b Résolution d'un système diagonal

La "*résolution*" d'un système diagonal, est très simple : si, pour $k\in[\![1,n]\!]$, $\mathcal{S}_k$ désigne l'ensemble des solutions dans $\mathbf{K}$ de l'équation $a_{k,k}x_k=b_k$, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (D) est simplement le produit cartésien des $\mathcal{S}_k$:

$$\mathcal{S}=\prod_{k=1}^{n}\mathcal{S}_k$$

Remarque : Comme pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\mathcal{S}_k$ est $\mathbf{K}$ tout entier ou vide, ou réduit à un singleton, il en résulte que l'ensemble de solutions d'un système diagonal, est ou bien infini, ou bien $\emptyset$ ou bien réduit à un singleton. De plus, d'après le **Lemme** 18.1, $\mathcal{S}_k$ est réduit à un singleton lorsque $a_{k,k}$ est non nul. La proposition suivante en découle immédiatement :

Proposition 18.3.— Soit (D) un système diagonal de n équations à n inconnues. Alors

(D) possède une unique solution
si et seulement si
tous les coefficients diagonaux de (D) sont non nuls.

2 Systèmes triangulaires

2.a Définition

Les systèmes diagonaux ne reflètent pas la difficulté de résoudre un véritable *système* d'équations car en ce cas, les équations ne sont pas *imbriquées*. Le premier exemple *non trivial* de systèmes, est le cas des systèmes triangulaires.

Définition : *Un système (T) de n équations à n inconnues est dit* ***triangulaire supérieur*** *lorsque*

$$\big(\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2\big),\quad \big((i>j)\Rightarrow a_{i,j}=0\big).$$

En clair (T) *s'écrit :*

$$(T)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,k}x_k+\cdots+a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,k}x_k+\cdots+a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{k,k}x_k+\cdots+a_{k,n}x_n = b_k \\ \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

Exemple :

$$(T)\quad \begin{cases} 5x-3y = 6 \\ -y+2z+t = 8 \\ -z-t = 1 \\ 2t = 4 \end{cases}$$

2.b Résolution des systèmes triangulaires par remontée

La **méthode** pour résoudre un tel système est de résoudre la dernière équation, puis de *remonter* à l'avant-dernière en substituant à x_n sa valeur. Ainsi, l'avant-dernière équation est une équation du premier degré en x_{n-1} que l'on résout, puis on *remonte* à la $(n-2)^{\text{ième}}$ équation en substituant aux inconnues x_n et x_{n-1} les valeurs obtenues, *etc...*
On dit que l'on résout les systèmes triangulaires par ***remontée***.

Exercice : Résoudre par *remontée* le système (T) défini ci-dessus.

Solution ▽

$$(T) \iff \begin{cases} 5x-3y = 6 \\ -y+2z+t = 8 \\ -z-t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x-3y = 6 \\ -y+2z+t = 8 \\ z = -3 \\ t = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -6 \\ y = -12 \\ z = -3 \\ t = 2 \end{cases}$$

Par conséquent (T) *admet pour unique solution le 4-uplet* $(-6,-12,-3,2)$. ▲

2.c Solutions d'un système triangulaire

Théorème 18.4.—
Soit (T) un système triangulaire de n équations à n inconnues. Alors

(T) possède une unique solution
si et seulement si
tous les coefficients diagonaux de (T) sont non nuls.

Démonstration ▽
■**Démontrons que la condition est suffisante :**
Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^\star$, la propriété

$\mathcal{P}(n)$: *tout système triangulaire de n équations à coefficients diagonaux non nuls admet une unique solution.*

- **Initialisation :** lorsque $n=1$, tout système triangulaire de 1 équation s'écrit : $a_{1,1}x_1 = b_1$. Comme $a_{1,1} \neq 0$, ce système possède une unique solution. (cf **Lemme** 18.1).
- **Hérédité :** Soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Soit (T) un système de $n+1$ équations à coefficients diagonaux non nuls. Montrons par remontée que (T) possède une unique solution. Comme $a_{n+1,n+1} \neq 0$, nous pouvons résoudre la $n+1^{\text{ième}}$ équation de façon unique. Ainsi :

$$(T) \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,n}x_n+a_{1,n+1}x_{n+1} = b_1 \\ a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,n}x_n+a_{2,n+1}x_{n+1} = b_2 \\ \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n,n}x_n+a_{n,n+1}x_{n+1} = b_n \\ x_{n+1} = \tilde{b}_{n+1} \end{cases}$$

où $\tilde{b}_{n+1} = \dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1,n+1}}$. Ainsi, nous *connaissons* la valeur de x_{n+1}. Substituons donc cette valeur à l'inconnue x_{n+1} dans chacune des n premières lignes. *As a result, we get* :

$$(T) \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,k}x_k + \cdots + a_{1,n}x_n = \tilde{b}_1 \\ a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,k}x_k + \cdots + a_{2,n}x_n = \tilde{b}_2 \\ \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{k,k}x_k + \cdots + a_{k,n}x_n = \tilde{b}_k \\ \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n,n}x_n = \tilde{b}_n \\ x_{n+1} = \lambda_{n+1} \end{cases}$$

où nous avons noté pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\tilde{b}_k = b_k - a_{k,n+1} \times \tilde{b}_n$.
Comme l'inconnue x_{n+1} n'apparaît plus dans les n premières lignes de ce système, ces n premières équations forment un système triangulaire de n équations à n inconnues dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls. Par *hypothèse de récurrence*, il en résulte que ce système possède une unique solution $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Par conséquent, le système (T) admet comme unique solution le $n+1$-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1})$.

- **Conclusion :** par récurrence, nous avons démontré que tout système triangulaire à coefficients diagonaux non nuls admet une unique solution.

■Démontrons que la condition est nécessaire :

La preuve sera, une fois encore, par récurrence sur n : démontrons que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$\mathcal{P}(n) : \quad \textit{tout système triangulaire de } n \textit{ équations qui possède une unique solution a ses coefficients diagonaux non nuls.}$$

- **Initialisation :** lorsque $n = 1$, tout système triangulaire de 1 équation s'écrit : $a_{1,1}x_1 = b_1$. D'après le **Lemme** 18.1, si ce système possède une unique solution, alors $a_{1,1} \neq 0$.
- **Hérédité :** Soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Soit (T) un système de $n+1$ équations admettant une unique solution. Notons T_n le système constitué des n dernières lignes de T :
  ✓ Montrons *par l'absurde* que $a_{1,1} \neq 0$. Supposons au *contraire* que $a_{1,1} = 0$: dans le système (T) aucune condition ne porte sur l'inconnue x_1. Comme le système (T) est compatible, alors toute valeur de x_1 est solution : nous obtenons ainsi une infinité de solutions, *contrairement* à l'hypothèse. Ceci prouve que $a_{1,1} \neq 0$.

  Par conséquent, pour tout $(n+1)$-uplet $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{K}^{n+1}$, nous avons l'équivalence :

  $$(E) \qquad (x_1, \ldots, x_{n+1}) \text{ est solution de } (T) \iff \begin{array}{l} \bullet \quad (x_2, \ldots, x_{n+1}) \text{ est solution de } (T_n) \\ \bullet \quad x_1 = (1/a_{1,1}) \left(b_1 - \sum_{k=2}^{n+1} a_{1,k}x_k\right) \end{array}$$

  ✓ Montrons par l'absurde que (T_n) admet une unique solution.

  ▶ Si (T_n) n'a aucune solution, alors d'après (E), (T) n'admet aucune solution ;
  ▶ Si (T_n) admet (au moins) deux solutions distinctes alors -toujours grâce à (E)- (T) possède aussi (au moins) deux solutions distinctes.

  Dans tous les cas, nous obtenons une contradiction.
  ✓ *where H-R comes into play.*
  Ainsi le système triangulaire (T_n) de n équations à n inconnues possède une unique solution. Par hypothèse de récurrence, il en résulte que les coefficients diagonaux de (T_n) sont non nuls, c'est-à-dire que $\forall k \in [\![2, n+1]\!]$, $a_{k,k} \neq 0$. Comme nous avons précédemment démontré que $a_{1,1}$ était nécessairement non nul, il en résulte que (T) a tous ses coefficients diagonaux non nuls.
- **Conclusion :** par récurrence, nous avons démontré que tout système triangulaire possédant une unique solution a tous ses coefficients diagonaux non nuls. ▲

La morale : L'intérêt que nous portons aux systèmes triangulaires est basé sur le fait que -dans les *bons cas*- nous pouvons ramener la résolution d'un tel système à la résolution de n équations linéaires ne mettant chacune en jeu qu'une seule inconnue.
Lorsque les coefficients diagonaux sont tous non nuls,

nous pouvons **découpler** un système triangulaire de n équations à n inconnues
en
un système de n équations à 1 inconnue **indépendantes** les unes des autres.

Exercice : Soit (T) un système triangulaire. On suppose que (T) possède une unique solution. Démontrez que tout système obtenu à partir de (T) en ne changeant que le second membre (b_i) admet une unique solution.

Solution ▽
en effet, d'après le **Théorème** *18.4 une condition nécessaire et suffisante pour que* (T) *admette une unique solution est que ces coefficients diagonaux soient non nuls... Il n'y a donc* **aucune** *restriction sur les seconds membres.*☺ ▲

3 Systèmes échelonnés

Les systèmes diagonaux ou même triangulaires sont des exemples très importants de systèmes, mais ils ne reflètent pas la situation générale d'un système de n équations à p inconnues. Les systèmes échelonnés, constituent véritablement le modèle *canonique* pour les systèmes de n équations à p inconnues.

3.a Définitions

Définition : *Le système* (E) *est dit* ***échelonné*** *s'il existe* r, $1 \leq r \leq p$ *et* $1 \leq r \leq n$ *tel que* (E) *se présente sous la forme :*

$$(E)\left\{\begin{array}{rcl}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,r}x_r + \cdots + a_{1,p}x_p &=& b_1 \\
a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,r}x_r + \cdots + a_{2,p}x_p &=& b_2 \\
\ddots & \vdots & \\
a_{r,r}x_r + \cdots + a_{r,p}x_p &=& b_r \\
0 &=& b_{r+1} \\
& \vdots & \\
0 &=& b_n
\end{array}\right.
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}\\\\\\\end{array}\right. \\
\left.\begin{array}{l}r \quad \textit{équations} \\ \textit{principales}\end{array}\right. \\
\left.\begin{array}{l}\\\\\\\end{array}\right. \\
\left.\begin{array}{l}n\text{-}r \textit{ équations} \\ \textit{auxiliaires}\end{array}\right.
\end{array}$$

où ***les coefficients diagonaux*** $a_{i,i}$ ***pour*** $1 \leq i \leq r$ *sont* ***non nuls****.*

- *Les inconnues* $x_1, x_2, \ldots, x_r$ *sont appelées les* ***inconnues principales****,*
- *Les inconnues* $x_{r+1}, \ldots, x_p$ *sont appelées les* ***inconnues auxiliaires*** *ou* ***variables libres****.*
- r *s'appelle le* ***rang du système****.*

Remarque : Notez que par définition, on a toujours $r \leq p$.

Exemple : le système suivant est échelonné, de rang 3. Il possède 3 équations principales, une variable libre :

$$(E)\quad \left\{\begin{array}{rcl}
\boxed{5}x - 3y + 2t &=& -1 \\
\boxed{1}y - 2z - t &=& -4 \\
\boxed{1}z - t &=& 3
\end{array}\right.$$

Notation : *pour distinguer certains coefficients non nuls, je* $\boxed{les}$ *encadre.*

3.b Résolution des systèmes échelonnés

Théorème 18.5.—
Soit (E) un système échelonné. Alors

- (E) est compatible *si et seulement si* les $n - r$ équations auxiliaires sont vérifiées.

Dans ce cas,

- (E) possède une unique solution *si et seulement si* $r = p$
- (E) possède une infinité de solutions *si et seulement si* $r < p$.

Commentaires : les rôles des équations principales et auxiliaires sont bien déterminés dans ce théorème :

- les **équations auxiliaires** sont chacune équivalente soit à "0=0", soit à "1=0". Par conséquent, ce sont les équations auxiliaires qui indiquent si **oui** ou **non** le système est **compatible**.
- les équations **principales**, servent lorsque le système est compatible à **déterminer l'ensemble des solutions**.

En pratique : pour résoudre un système échelonné de n équations à p inconnues de rang r :

- s'il y a des équations auxiliaires non compatibles le système n'a pas de solutions.
- si le système est compatible, deux cas sont possibles :
  - **le système est de rang maximal** p
    En ce cas, il n'y a pas de variables libres. Le système est équivalent à un système triangulaire $p \times p$ à coefficients diagonaux non nuls. Par conséquent, vous résolvez par remontée et obtenez une unique solution.
  - **le système est de rang strictement inférieur à** p
    En ce cas, il y a $p-r$ variables libres. L'ensemble des solutions est infini et paramétré par ces $p-r$ variables libres. Vous les *passez* au second membre et résolvez le système triangulaire $r \times r$ à coefficients diagonaux non nuls ainsi obtenu par remontée.

Démonstration ▽

■**La condition est trivialement nécessaire** : si dans le système (E) apparaît une équation équivalente à $1 = 0$, le système est clairement incompatible.

■**Montrons que la condition est suffisante :** supposons donc que les b_k sont nuls pour $k \geq r+1$. Ainsi, le système (E) est équivalent au système constitué des équations principales :

$$(E) \iff \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,r}x_r & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,r}x_r & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ & & & & & & a_{r,r}x_r & + & \cdots & + & a_{r,p}x_p & = & b_r \end{array} \right.$$

Discutons suivant la valeur de $r \in [\![1, p]\!]$.

- **Si $r = p$, montrons que S admet une unique solution :**
  Dans ce cas,
  $$(E) \iff \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + \cdots + & a_{1,p-1}x_{p-1} & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + \cdots + & a_{2,p-1}x_{p-1} & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & a_{p-1,p-1}x_{p-1} & + & a_{p-1,p}x_p & = & b_{p-1} \\ & & & & & & a_{p,p}x_p & = & b_p \end{array} \right.$$
  Les premiers coefficients dans chaque ligne étant non nuls, cela signifie que (E) est équivalent à un système triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls. D'après le **Théorème** 18.4, (E) possède une unique solution.
- **Si $r < p$, montrons que S admet une infinité de solutions :**
  Dans ce cas, nous pouvons réecrire le système (E) sous la forme suivante :
  $$(E) \iff \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + \cdots + & a_{1,r}x_r & + & a_{1,r+1}x_{r+1} & + \cdots + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + \cdots + & a_{2,r}x_r & + & a_{2,r+1}x_{r+1} & + \cdots + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & & \ddots & & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & a_{r,r}x_r & + & a_{r,r+1}x_{r+1} & + \cdots + & a_{r,p}x_p & = & b_r \end{array} \right.$$
  $$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + \cdots + & a_{1,r}x_r & = & b_1 - \big(a_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1,p}x_p\big) \\ & & a_{2,2}x_2 & + \cdots + & a_{2,r}x_r & = & b_2 - \big(a_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2,p}x_p\big) \\ & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & a_{r,r}x_r & = & b_r - \big(a_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{r,p}x_p\big) \end{array} \right.$$
  Donnons des valeurs *arbitraires* $(\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_p)$ aux variables *libres* $(x_{r+1}, \ldots, x_p)$ du système (E). Le système obtenu est un système triangulaire de r équations à r inconnues dont les coefficients diagonaux sont non nuls. D'après

le**Théorème** 18.4, ce système possède une unique solution.

Ainsi, pour chaque valeur $(\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_p)$, de $(x_{r+1}, \ldots, x_p)$, le système possède une unique solution. Par conséquent, (E) possède une infinité de solutions.

▲

Exercice : Résoudre dans $\mathbf{R}^4 = \{(x, y, z, w)\}$ les systèmes :

$$(S_1)\begin{cases} 2x+\ y-2z+3w=\ 1 \\ 7y+4z-5w=\ 6 \\ 0=-8. \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} 2x+\ y-2z+3w=1 \\ 7y+4z-5w=6 \\ 2z+\ w=3 \\ w=1 \end{cases} \quad (S_3)\begin{cases} 2x+\ y-2z+3w=1 \\ 7y+4z-5w=6 \\ 2z+\ w=3 \end{cases}$$

Solution ▽

1. (S_1) *admet une équation auxiliaire kidinon. Par conséquent,* $\mathcal{S}_1 = \emptyset$.
2. (S_2) *est triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls, il admet une unique solution obtenue par remontée :*

$$\mathcal{S}_2 = \left\{\left(-\frac{1}{2}, 1, 1, 1\right)\right\}$$

3. (S_3) *est un système échelonné de rang 3. Il n'y a pas d'équation auxiliaire donc il est compatible. Il y a une variable libre. On la passe au second membre et on résout par remontée :*

$$\begin{cases} \boxed{2}x+\ y-\ 2z+3w=1 \\ \boxed{7}y+\ 4z-5w=6 \\ \boxed{2}z+\ w=3 \end{cases} \iff \begin{cases} x\ =2-\frac{5}{2}w \\ y\ =w \\ z=\frac{3}{2}-\frac{w}{2} \end{cases}$$

Ainsi

$$\mathcal{S}_3 = \left\{\left(2-\frac{5}{2}w, w, \frac{3}{2}-\frac{1}{2}w, w\right);\ w \in \mathbf{R}\right\}$$

▲

Remarques :

1. Dans la pratique, on ne marque pas les équations auxiliaires compatibles, *i.e.* les équations équivalentes à "$0 = 0$".
2. Lorsque le système est compatible, l'ensemble des solutions dépend de $p - r$ paramètres : les variables libres. Lorsque $r = p$, il n'y a pas de variables libres ou paramètres, le système admet une unique solution.

III Résolution des systèmes d'équations linéaires, cas général

1 La méthode du pivot de Gauss

La méthode de Gauss permet, à partir de n'importe quel système d'équations linéaires de se ramener à la résolution d'un système échelonné.

Théorème 18.6.— Théorème Fondamental (Gauss)

Tout système d'équations linéaires ayant au moins un coefficient non nul est équivalent à un système échelonné.

Démonstration ▽

La preuve sera par récurrence sur le nombre de lignes $n \in \mathbf{N}^\star$ du système : plus précisément nous démontrons que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$

$\mathcal{P}(n)$: *tout système à coefficients non tous nuls de n équations linéaires est équivalent à un système échelonné.*

• **Initialisation :** si $n = 1$. Soit (S) un système à une équation et à coefficients non tous nuls. Une des inconnues a un coefficient non nul. Quitte à permuter les colonnes, nous pouvons supposer qu'il s'agit de x_1. Ainsi,

$$(S) \iff \boxed{a_{1,1}}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1$$

Comme[2] $a_{1,1} \neq 0$, ce système est échelonné !

• **Hérédité :** soit $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que tout système à coefficients non tous nuls de n équations linéaires soit équivalent à un système échelonné.
Soit (S) un système de $n+1$ équations et à coefficients non tous nuls. Comme les coefficients sont non tous nuls, il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ tel que $a_{i,j} \neq 0$. Quitte à échanger la $i^{ième}$ et la première ligne, nous pouvons supposer que $i = 1$. De même, quitte à échanger la $j^{ième}$ et la première colonne, nous pouvons supposer que $j = 1$. Ainsi,

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcl} \boxed{a_{1,1}}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p &=& b_1 \quad (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p &=& b_2 \quad (L_2) \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots & & \\ a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \cdots + a_{n+1,p}x_p &=& b_{n+1} \quad (L_{n+1}) \end{array}\right.$$

où $a_{1,1} \neq 0$.
A présent, nous allons **éliminer** x_1 des n dernières équations. Pour ce faire, nous effectuons les opérations élémentaires[3] suivantes :

$$\forall i \in [\![2, n+1]\!], \quad L_i' \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1$$

Par ces opérations élémentaires sur les lignes de (S), nous obtenons l'équivalence :

$$\begin{array}{rl} (S) & \iff \left\{\begin{array}{rcl} \boxed{a_{1,1}}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p &=& b_1 \quad (L_1) \\ \tilde{a}_{2,2}x_2 + \cdots + \tilde{a}_{2,p}x_p &=& \tilde{b}_2 \quad (L_2') \\ \vdots \qquad\quad \vdots & & \\ \tilde{a}_{n+1,2}x_2 + \cdots + \tilde{a}_{n+1,p}x_p &=& \tilde{b}_{n+1} \quad (L_{n+1}') \end{array}\right. \\ & \iff \left\{\begin{array}{l} \boxed{a_{1,1}}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \quad (L_1) \\ \boxed{\phantom{a_{1,1}}} \quad (S_n') \end{array}\right. \end{array}$$

Le système (S_n') est un système de n équations à $p-1$ inconnues : $x_2, \ldots, x_p$.
Deux cas se présentent :

► **either** tous les coefficients de (S_n') sont nuls, auquel cas ce système est de la forme

$$S_n' \iff \left\{\begin{array}{rcl} 0 &=& \tilde{b}_2 \\ & \vdots & \\ 0 &=& \tilde{b}_{n+1} \end{array}\right.$$

Dans ce cas, le système

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{a_{1,1}}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \quad (L_1) \\ \boxed{\phantom{a_{1,1}}} \quad (S_n') \end{array}\right.$$

est échelonné.

► **Or** les coefficients de (S_n') sont non tous nuls, auquel cas, le système de n équations linéaires (S_n') est équivalent, par **hypothèse de récurrence** à un système échelonné (S_n''). Par transitivité de l'équivalence, il en résulte que

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{l} \boxed{a_{1,1}}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \quad (L_1) \\ \boxed{\phantom{a_{1,1}}} \quad (S_n'') \end{array}\right.$$

[2] c'est la raison pour laquelle j'encadre $a_{1,1}$
[3] C'est légal car $a_{1,1} \neq 0$

Ce dernier système étant échelonné.

Dans tous les cas, nous avons prouvé que (S) est équivalent à un système échelonné.

• **Conclusion :** Par récurrence, nous avons démontré que tout système à coefficients non tous nuls est équivalent à un système échelonné. ▲

2 Algorithme de Gauss

2.a Principe de la méthode de Gauss

Considérons un système (S) à coefficients non tous nuls. L'idée générale est d'*échelonner* le système de proche en proche :

- on commence par repérer un coefficient non nul, appelé **pivot**. Un tel pivot $(a_{i,j})$ existe par hypothèse.
- par échange des lignes et des colonnes le cas échéant, on *ramène* le pivot en première position. On a ainsi obtenu l'équivalence

$$(S) \iff \begin{cases} \boxed{a_{1,1}}\, x_1 + \star\ \star\ \star\ \star\ = b_1 & (L_1) \\ \boxed{} & (S') \end{cases}$$

- puis on échelonne le système en **éliminant** par opérations élémentaires l'inconnue x_1 du système (S') pour se ramener à un système du type :

$$(S) \iff \begin{cases} \boxed{a_{1,1}}\, x_1 + \star\ \star\ \star\ \star\ = b_1 & (L_1) \\ \boxed{} & (S'') \end{cases}$$

- deux cas se présentent :
  - si le système S'' a tous ses coefficients nuls, le système est échelonné.
  - sinon, on applique la procédure ci-dessus au système (S''), *etc...*

2.b Mise en œuvre

1. On considère le système

$$(S_1) \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 & (L_1) \\ x + 3y + z = 11 & (L_2) \\ 2x + 5y - 4z = 13 & (L_3) \\ 4x + 11y = 37 & (L_4) \end{cases}$$

a. En suivant la **méthode de Gauss**, montrez que (S_1) est équivalent à un système échelonné (S_1').

b. Résolvez (S_1) par *remontée*.

2. Mêmes questions pour les systèmes

$$(S_2) \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 2z + 4t = 2 \\ x + 3y + 3z + 7t = 4 \end{cases} \quad (S_4) \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 2z + 4t = 2 \\ x + 3y + 3z + 7t = 3 \end{cases}$$

Solution ▽

je ne traite que la première question :

(a)

$$(S_1) \iff \left\{\begin{array}{rrrr|l} x & +2y & -3z = & 4 & L_1 \\ x & +3y & +z = & 11 & L_2 \\ 2x & +5y & -4z = & 13 & L_3 \\ 4x & +11y & = & 37 & L_4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrr|l} \boxed{1}x & +2y & -3z = & 4 & \\ & \boxed{1}y & +4z = & 7 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & y & +2z = & 5 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ & 3y & +12z = & 21 & L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrr|l} \boxed{1}x & +2y & -3z = & 4 & \\ & \boxed{1}y & +4z = & 7 & \\ & & \boxed{1}z = & 1 & L_3 \leftarrow (1/2)\big(L_2 - L_3\big) \\ & & 0 = & 0 & L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{array}\right.$$

(b) Ainsi, (S) est équivalent à un système échelonné compatible de rang 3. Par remontée, j'obtiens directement :

$$(S_1) \iff \left\{\begin{array}{rrr} x & +2y & -3z = 4 \\ & y & +4z = 7 \\ & & z = 1 \\ & & 0 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

Par conséquent, (S) admet pour unique solution le triplet $(1, 3, 1)$. ▲

3 Structure de l'ensemble des solutions

3.a Résultats basiques

A l'aide de l'algorithme de Gauss, on montre que tout système (à coefficients non tous nuls) est équivalent à un système échelonné. On déduit alors de la résolution de ces systèmes que d'un point de vue qualitatif, l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires, n'a pas évolué au cours du chapitre, puisque nous retrouvons les trois mêmes possibilités que pour l'ensemble des solutions d'une seule équation :

Théorème 18.7.— Tout système de n équations linéaires à p inconnues possède

- **ou bien** une infinité de solutions ;
- **ou bien** aucune solution ;
- **ou bien** une unique solution.

Remarque : en particulier, un système indéterminé possède une infinité de solutions.

Démonstration ▽
Soit (S) un système de n équations linéaires à p inconnues. D'après le **Théorème** 18.6, (S) est équivalent à un système échelonné de rang r. D'après le **Théorème** 18.5, trois cas sont possibles :

- une des $n - r$ équations auxiliaires n'est pas vérifiée, et dans ce cas $\mathcal{S} = \emptyset$.
- les $n - r$ équations auxiliaires sont vérifiées et $r < p$, auquel cas, il reste des variables libres : il y a une infinité de solutions.
- les $n - r$ équations auxiliaires sont vérifiées et $r = p$, auquel cas (S) possède une unique solution.

▲

Proposition 18.8.— Tout système **compatible** de n équations à p inconnues avec $n < p$ admet une infinité de solutions.

Démonstration ▽
Soit (S) un système compatible de n équations linéaires à p inconnues. D'après le **Théorème** 18.6, (S) est équivalent à un système échelonné (E) de rang $r \leq n$. Comme (S) est compatible, (E) l'est aussi. De plus $r \leq n < p$. D'après le **Théorème** 18.5, (E) -et par conséquent (S)- possède une infinité de solutions. ▲

3.b Structure de l'ensemble des solutions d'un système homogène

Proposition 18.9.— $\mathcal{S}_o$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^p$
Soit (S) un système de n équations linéaires à p inconnues. On note $\mathcal{S}_o$ l'ensemble des solutions du système homogène associé.

- $(0, \ldots, 0)$ appartient à $\mathcal{S}_o$.
- $\forall x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathcal{S}_o$, $\forall y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathcal{S}_o$, $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p) \in \mathcal{S}_o$.
- $\forall x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathcal{S}_o$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_p) \in \mathcal{S}_o$

Vocabulaire : *on dira*[4] *que $\mathcal{S}_o$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^p$.*

[4] très bientôt

Démonstration ▽

$$(S_o)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & 0\\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & 0\\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & 0 \end{array}\right.$$

- il est clair que le p-uplet $(0,\dots,0)$ est solution de (S_o)
- si $(x_1,\dots,x_p)$ et $(y_1,\dots,y_p)$ sont deux p-uplets solutions de (S_o), on obtient aisément en ajoutant membre à membre que $(x+y=(x_1+y_1,\dots,x_p+t_p)$ est solution de (S_o).
- De même, si $x=(x_1,\dots,x_p)$ est solution de (S_0), on obtient en multipliant chaque ligne du système par λ que $\lambda\cdot x=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_p)$ l'est aussi. ▲

3.c Lien avec l'ensemble des solutions de système complet

Théorème 18.10.— Structure de $\mathcal{S}$
Soit (S) un système compatible de n équations linéaires à p inconnues.
Soit $x^\circ=(x_1^\circ,\dots,x_p^\circ)\in\mathbf{K}^p$ une solution particulière de (S) et notons $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_o$ les ensembles des solutions de (S) et de son système homogène associé (S_o). Alors

$$\boxed{\forall x\in\mathbf{K}^p,\quad x\in\mathcal{S}\iff x-x^\circ\in\mathcal{S}_o}$$

En d'autres termes,

$$\mathcal{S}=x^\circ+\mathcal{S}_o$$

Démonstration ▽
Soit x° une solution particulière de (S) de sorte que

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} b_1 & = & a_{1,1}x_1^\circ & + & a_{1,2}x_2^\circ & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p^\circ\\ b_2 & = & a_{2,1}x_1^\circ & + & a_{2,2}x_2^\circ & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p^\circ\\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots\\ b_n & = & a_{n,1}x_1^\circ & + & a_{n,2}x_2^\circ & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p^\circ \end{array}\right.$$

Alors pour tout p-uplet $x=(x_1,\dots,x_p)$, nous avons les équivalences

$$\begin{array}{rcl} x \text{ est solution de } (S) & \iff & \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1\\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2\\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.\\ & \iff & \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}(x_1-x_1^\circ) & + & a_{1,2}(x_2-x_2^\circ) & + & \cdots & + & a_{1,p}(x_p-x_p^\circ) & = & 0\\ a_{2,1}(x_1-x_1^\circ) & + & a_{2,2}(x_2-x_2^\circ) & + & \cdots & + & a_{2,p}(x_p-x_p^\circ) & = & 0\\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1}(x_1-x_1^\circ) & + & a_{n,2}(x_2-x_2^\circ) & + & \cdots & + & a_{n,p}(x_p-x_p^\circ) & = & 0 \end{array}\right.\\ & \iff & x-x^\circ \text{ est solution de } (S_o) \end{array}$$

▲

IV Systèmes de Cramer

1 Définition

Retournons au cas particulier des systèmes possédant autant d'équations que d'inconnues. Nous démontrons ici **deux théorèmes fondamentaux** qui généralisent ceux que nous avons déjà démontrés pour les systèmes diagonaux et triangulaires.

Définition : *Un système de n équations linéaires à n inconnues possédant une unique solution est appelé un système de* CRAMER[5].

Nb : les systèmes de CRAMER sont des systèmes carrés.

En pratique : pour savoir si un système (S) est de Cramer, la méthode d'élimination de GAUSS fournit un critère simple :

Théorème 18.11.— Cramer via Gauss
Soit (S) un système de n équations à n inconnues.

(S) est de CRAMER *si et seulement si* l'algorithme de GAUSS fait apparaître n pivots non nuls.

En d'autres termes,

Corollaire 18.12.— si (S) est un système de n équations linéaires à n inconnues

(S) est de CRAMER
si et seulement si
(S) est équivalent à un système triangulaire à coefficients diagonaux non nuls.

Démonstration ▽
Soit (S) un système de n équations à n inconnues. D'après le **Théorème** 18.6, (S) est équivalent à un système échelonné, noté (E). On note r le rang de (E).
La preuve sera par **disjonction de cas** :

- si $r = n$, en ce cas, le système (E) n' a aucune équation[6] auxiliaire. Le système est donc compatible. De plus, comme ce système a autant d'inconnues que d'équations, il en résulte que $r = p$. Il suffit alors d'appliquer le **Théorème** 18.5 pour en déduire que (E) possède une unique solution. Comme (S) est équivalent à (E), il en résulte finalement que (S) admet une unique solution, il s'agit donc d'un système de CRAMER.
- si $r < n$, en ce cas, le système échelonné (E) possède des équations axiliaires. D'après le **Théorème** 18.5, deux cas se présentent :
  - soit (E) possède une équation auxiliaire *kidinon*, et alors (E) est incompatible. Par conséquent (S) n'admet aucune solution.
  - soit (E) est compatible et dans ce cas, (E) possède des variables libres ($n-r$ pour être précis). Par conséquent, (E) admet une infinité de solutions, de même que (S).

  Dans tous les cas, (S) n'est pas de CRAMER.
- par disjonction de cas, on a prouvé que (S) est de CRAMER *si et seulement si* (E) est de rang maximal : $r = n$. Comme r est exactement le nombre de pivots apparus dans l'algorithme de Gauss, le résultat s'ensuit. ▲

2 Caractérisations des systèmes de Cramer

Dans le cas d'un système triangulaire (T), nous avons démontré que (T) possède une unique solution *si et seulement si* ses coefficients diagonaux sont non nuls. En particulier, comme nous l'avons observé en ***Exercice***, **cette condition ne dépend pas du second membre**. Comme les systèmes de CRAMER sont les systèmes équivalents à un système triangulaire à coefficients diagonaux non nul, Il en va donc de même pour tout système de CRAMER. Le théorème suivant résume ces propriétés fondamentales :

[5] C'est à GABRIEL CRAMER (1704-1752) que l'on attribue les formules permettant de calculer directement en fonction des coefficients et du second membre les systèmes d'équations $n \times n$ qui possèdent une unique solution. En réalité MAC LAURIN avait déjà énoncé ces formules dans les cas $n = 2, 3, 4$ quelques années auparavant.
[6] le nombre d'équations auxiliaires est $n - r$

Théorème 18.13.— Systèmes de Cramer
Soit (S) un système de n équations linéaires à n inconnues. **Les assertions suivantes sont équivalentes :**

1.	(S) possède une unique solution, c'est-à-dire (S) est de CRAMER.
2.	le système homogène associé (S_o) possède une unique solution.
3.	pour tout second membre b, le système (S_b) possède une unique solution.

Notation : *dans l'énoncé ci-dessus, nous avons noté (S_b) le système ayant même coefficients que (S) et pour second membre $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.*
Rappelons que lorsque $b = (0, \dots, 0)$, le système $(S_{(0,\dots,0)})$, noté plus simplement (S_o), est le ***système homogène*** *associé à (S).*

Commentaires : ce théorème affirme que le fait qu'un système soit de CRAMER est indépendant du second membre :
si pour *un* second membre donné le système (S) admet une unique solution, **alors** pour *tout* second membre $b \in \mathbf{K}^n$, le système $S_b)$ admet une unique solution.

Le théorème suivant est tout à fait **fondamental** et *spectaculaire* qui donne deux nouvelles caractérisations des systèmes de CRAMER :

Théorème 18.14.— Systèmes de Cramer *–suite ···*
Soit (S) un système de n équations linéaires à n inconnues. **Les assertions suivantes sont équivalentes :**

3.	pour tout second membre b, le système (S_b) possède une unique solution.
4.	pour tout second membre b, le système (S_b) possède au moins une solution.
5.	pour tout second membre b, le système (S_b) possède au plus une solution.

Warning : il s'agit de propriétés universelles. Le fait que pour **un second membre** le système (S_b) possède au plus (ou au moins) une solution ne garantit absolument pas que le système (S) possède ou au moins (au plus) une solution (cf l'***Exercice*** plus loin).

Commentaires : d'après le **Théorème** 18.13, ces trois assertions, sont encore équivalentes à dire que le système est de CRAMER. Pour bien comprendre ce théorème, il faut penser par contraposée :

Par définition, si (S) n'est pas de CRAMER, soit il n'admet aucune solution, soit il admet une infinité de solutions.
Le **Théorème** 18.14 affirme que :
si (S) n'est pas de CRAMER, **alors**

- il existe *un second membre b* pour lequel (S_b) n'a aucune solution
- il existe *un autre second membre* pour lequel (S_b) admet une infinité de solutions.
- il n'existe *aucun second membre* pour lequel (S_b) admette une unique solution. ☺

Démonstration ▽

■ **le cas particulier des systèmes échelonnés :**
Soit (E) un système échelonné de n équations à n inconnues.

$3. \Rightarrow 4.$ c'est trivial !

$3. \Rightarrow 5.$ c'est trivial !

Pour la démonstration des implications $4. \Rightarrow 3.$ et $5. \Rightarrow 3.$, l'hypothèse est **de type universel**. On suppose que

pour tout second membre $b \in \mathbf{K}^n$ le système

$$(E_b)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,r}x_r+\cdots+a_{1,n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,r}x_r+\cdots+a_{2,n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{r,r}x_r+\cdots+a_{r,n}x_n = b_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_n \end{cases}$$

admet au moins une solution (pour 4. $\Rightarrow$ 3.) ou bien au plus une solution (pour 5. $\Rightarrow$ 3.). Comme souvent lorsque l'hypothèse est de type universel, la démonstration résulte d'un **choix judicieux** ...

4. $\Rightarrow$ 3. Supposons que pour tout second membre, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, (E_b) possède au moins une solution. **En particulier**, si nous prenons $b = (1, 1, \ldots, 1)$ le système :

$$(E_1)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,r}x_r+\cdots+a_{1,n}x_n = 1 \\ \qquad a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,r}x_r+\cdots+a_{2,n}x_n = 1 \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{r,r}x_r+\cdots+a_{r,n}x_n = 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 1 \end{cases}$$

possède au moins une solution. Comme l'équation $1 = 0$ est clairement impossible, il en résulte que nécessairement $n - r = 0$, i.e. $r = n$. Comme par hypothèse $n = p$, il en résulte que

$$\boxed{r = n(= p)}$$

Par suite, d'après le **Théorème** 18.5 pour tout $b \in \mathbf{K}^n$, (E_b) possède une unique solution.

5. $\Rightarrow$ 3. Supposons que pour tout second membre, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, (E_b) possède au plus une solution. **En particulier**, si nous prenons $b = (0, 0, \ldots, 0)$ le système homogène associé :

$$(E_0)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,r}x_r+\cdots+a_{1,n}x_n = 0 \\ \qquad a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,r}x_r+\cdots+a_{2,n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{r,r}x_r+\cdots+a_{r,n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

possède au plus une solution. Comme $(0, \ldots, 0)$ est solution, il s'agit de l'unique solution. Ainsi, (E_o) est un système de Cramer. D'après le **Théorème**18.13, il s'ensuit que pour tout second membre b, (E_b) est de Cramer.

Remarque : Il ne vous aura pas échappé que dans la preuve ci-dessus, les 5 assertions sont autant de façons de dire $r = n$!!

■ **le cas général :**

Grâce à l'algorithme du pivot de GAUSS, un système est toujours équivalent à un système échelonné. De plus, l'algorithme de GAUSS pour deux systèmes (S_b) et $(S_{b'})$ conduit naturellement à deux systèmes échelonnés dont seuls les seconds membres diffèrent. En particulier, le rang (c'est l'argument principal de la discussion ci-dessus) est préservé.

Soit donc (S) un système de n équations à n inconnues, notons (E) le système équivalent à (S) obtenu par la méthode du pivot. On note r le rang de (E).

$\boxed{3. \Rightarrow 4.}$ c'est trivial !

$\boxed{3. \Rightarrow 5.}$ c'est trivial !

$\boxed{5. \Rightarrow 3.}$ si pour tout second membre, (S_b) possède au plus une solution alors (S_o) possède une unique solution. D'après le **Théorème**18.13, il en résulte que pour tout second membre (S_b) possède une unique solution.

$\boxed{4. \Rightarrow 3.}$ si pour tout second membre (S_b) admet au moins une solution, alors par l'**algorithme de Gauss**, il en résulte que pour tout second membre $\tilde{b}$, $(E_{\tilde{b}})$ possède au moins une solution. Donc (E) est de rang n. En particulier, (E_o) possède une unique solution, et par suite (S_o) possède aussi une unique solution.

▲

Brain storming : *concentrez-vous* sur l'équivalence des trois assertions de ce dernier théorème.
Elles *ressemblent* à la résolution d'une équation $f(x) = b$. D'après le point de vue équation (cf **Proposition** 6.14) pour les notions d'injectivité, surjectivité et bijectivité, les assertions 3., 4. et 5. ressemblent à

3. f est bijective.

4. f est surjective.

5. f est injective.

L'équivalence $3 \iff 4 \iff 5$ pourrait alors se traduire par

f est **bijective** *si et seulement si* f est **surjective** *si et seulement si* f est **injective**.

Nous avons déjà démontré un théorème analogue : il s'agit du **Théorème** 28.9 concernant les applications entre ensembles finis de même cardinal.

Exercice : Résoudre dans $\mathbf{R}^3$ le système

$$(S_b) \quad \begin{cases} x + 2y - z = b_1 \\ -2x - 3y + 3z = b_2 \\ x + y - 2z = b_3 \end{cases}$$

dans les cas suivants :

1. $(b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 1)$

2. $(b_1, b_2, b_3) = (1, -2, 1)$

3. $(b_1, b_2, b_3) = (1, 2, 1)$

Solution ▽
Echelonnons (S_b) *par la méthode de* Gauss *:*

$$(S_b) \iff \left\{ \begin{array}{rrrl} \boxed{1}\, x & +2y & -z = b_1 & L_1 \\ -2x & -3y & +3z = b_2 & L_2 \\ x & +y & -2z = b_3 & L_3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrrl} \boxed{1}\, x & +2y & -z = b_1 & \\ & \boxed{1}\, y & +z = b_2 + 2b_1 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ & y & +z = b_1 - b_3 & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrl} \boxed{1}\, x & +2y & -z = b_1 & \\ & \boxed{1}\, y & +z = b_2 + 2b_1 & \\ & & 0 = b_1 + b_2 + b_3 & L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \right.$$

Ainsi, le système (S_b) *est équivalent à un système échelonné de rang 2 avec une équation auxiliaire :* $0 = b_1 + b_2 + b_3$*. Des trois seconds membres proposés, seul* $b = (1, -2, 1)$ *vérifie l'équation auxiliaire. Par conséquent,*

1. *Si* $(b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 1)$ *ou* $(b_1, b_2, b_3) = (1, 2, 1)$ *le système est incompatible.*

2. *Si* $(b_1, b_2, b_3) = (1, -2, 1)$*, le système est compatible, de rang 2, il y a donc une variable libre. Je passe les* z *au second membre et résous par remontée :*

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rrrl} x & +2y & -z = 1 \\ & y & +z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrl} x & +2y = z + 1 \\ & y = -z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 3z + 1 \\ y = -z \end{array} \right.$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{(3z + 1, -z, z) \ ; \ z \in \mathbf{R}\}$$

▲

Exercice : Soit $(a,b,c,d) \in \mathbf{C}^4$, non tous nuls. On considère le système

$$(S) \quad \begin{cases} ax+by = & 1675^2 \\ cx+dy = & \dfrac{j^3-27i+2}{57-3j^2} \end{cases}$$

Démontrez que

$$\boxed{(S) \text{ possède une unique solution } \textit{si et seulement si } ad-bc \neq 0.}$$

Vocabulaire : *le nombre $ad-bc$ s'appelle le* ***déterminant*** *du système (S).*

Solution ▽

Tout d'abord, remarquons que d'après le **Théorème** *18.13 (S) possède une unique solution si et seulement si le système homogène associé admet une unique solution.* ☺

Par hypothèse, l'un des quatre nombres a,b,c ou d n'est pas nul. Supposons sans perte de généralité que $a \neq 0$. Echelonnons (S_0) par la méthode de Gauss. *Il vient :*

$$(S_0) \iff \left\{ \begin{array}{rl|l} \boxed{a}\,x & +by=0 & L_1 \\ cx & +dy=0 & L_2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl|l} \boxed{a}\,x & +by=0 & \\ & (ad-bc)y=0 & L_2 \leftarrow aL_2-cL_1 \end{array} \right.$$

Ce système est échelonné. Il est de Cramer *si et seulement si* $\boxed{ad-bc \neq 0}$. ▲