TECHNIQUES & MÉTHODES S17

NB : cette fiche reprend les techniques nécessaires **minimales** ; elle ne constitue donc pas un objectif, mais un prérequis !

POLYNÔMES À UNE INDÉTERMINÉE

■■■ Opérations dans $\mathbf{K}[X]$

Pour vérifier qu'un polynôme est le polynôme nul, je montre au choix, que

- les coefficients de P sont tous nuls ;
- P est de degré strictement négatif ;
- P est de degré inférieur à n et a (au moins) $n+1$ racines comptées avec multiplicité ;
- P possède une infinité de racines.

Remarque : en appliquant ceci à $P-Q$, ces techniques permettent de montrer aussi une égalité entre polynômes.

■■■ Division euclidienne dans $\mathbf{K}[X]$

Lorsque les coefficients de A et B sont explicites, je pose la division suivant les puissances décroissantes.
Pour déterminer R, j'évalue la relation $A = B \times Q + R$ (ainsi que ses dérivées), aux points α qui sont racines de B.

Exercice 30 : Soit $n \geq 2$. Détermine le reste de la division euclidienne de $A(X) = X^n + X^{n-1} + X + 1$ par $(X-1)^2$.
réponse : $R(X) = 2nX + (4-2n)$

■■■ Racines d'un polynôme

Pour déterminer l'ordre de multiplicité de α comme racine de P, j'utilise la caractérisation des racines multiples : si $\tilde{P}(\alpha) = \tilde{P}'(\alpha) = \cdots = \tilde{P}^{(r-1)}(\alpha) = 0$ et $\tilde{P}^{(r)}(\alpha) \neq 0$, alors α est d'ordre r.

Exercice 31 : Détermine l'ordre de 1 comme racine de $X^5 + 7X^4 + 10X^3 - 2X^2 - 11X - 5$ *réponse :* 3

J'utilise les liens entre racines et coefficients d'un polynôme scindé

- pour déterminer les racines d'un polynôme ;
- pour résoudre un système d'équations d'inconnues $(x_1, \ldots, x_n)$.

Exercice 32 : Résoudre dans $\mathbf{C}^3$ le système $\left\{ \begin{array}{rrrr} x & +y & +z = & 8 \\ xy & +xz & +yz = & 9 \\ x & \times y & \times z = & -18 \end{array} \right.$.
réponse : les solutions sont les permutations de $(1, 3, -6)$.

■■■ Factorisations de polynômes

Obtenir la décomposition primaire dans $\mathbf{C}[X]$, revient à trouver les racines de P :
1 je détermine les racines complexes α_i de P, en résolvant dans $\mathbf{C}$ l'équation $\tilde{P}(z) = 0$;
2 je calcule les ordres de multiplicité r_i de chacune de ces racines ;
3 d'après le théorème de décomposition primaire, il existe $a \in \mathbf{C}$ tel que $P = a\ (X-\alpha_1)^{r_1} \times \cdots \times (X-\alpha_p)^{r_p}$;
4 j'obtiens a par identification des coefficients.

Exercice 33 : Soit $n \geq 2$, décompose dans $\mathbf{C}[X]$ $P = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$.
réponse : $P = \prod_{k=1}^{n-1}(X - \omega^k)$, où $\omega = \exp(2i\pi/n)$

Pour obtenir la décomposition de $P \in \mathbf{R}[X]$ en produit de facteurs irréductibles, je peux utiliser des identités obligatoires. Sinon :
1 je décompose P dans $\mathbf{C}[X]$ en produit de facteurs $(X-\zeta_i)^{r_i}$, où les ζ_i sont les racines réelles ou complexes de P
2 je regroupe les facteurs conjugués : $(X-\zeta_j)^{s_j}(X-\bar{\zeta}_j)^{s_j} = \left(X^2 + \beta_j\, X + \gamma_j\right)^{s_j}$, avec $(\beta_j, \gamma_j) \in \mathbf{R}^2$,
3 j'en déduis que $P = a\ (X-\alpha_1)^{r_1} \times \cdots \times (X-\alpha_p)^{r_p} \times \left(X^2 + \beta_1 X + \gamma_1\right)^{s_1} \times \cdots \times \left(X^2 + \beta_q X + \gamma_q\right)^{s_q}$,
4 je détermine a par identification.

Exercice 34 : Décompose dans $\mathbf{R}[X]$, $A(X) = X^4 + X^2 + 1$ et $B(X) = X^4 + 1$.
réponse : $A(X) = (X^2 - \sqrt{3}X + 1) \times (X^2 + \sqrt{3}X + 1)$ $B(X) = (X^2 - \sqrt{2}X + 1) \times (X^2 + \sqrt{2}X + 1)$

■■■ Arithmétique dans $\mathbf{K}[X]$

Pour déterminer le PGCD de deux polynômes A et B,

- j'utilise l'expression du pgcd lorsque A et B sont décomposés en produits d'irréductibles
- je mets en œuvre l'algorithme d'Euclide.

Exercice 35 : Détermine le PGCD de $A = X^7 - X - 1$ et $B = X^3 + 1$ *réponse : $A \wedge B = 1$*