TECHNIQUES & MÉTHODES S22

NB : cette fiche reprend les techniques nécessaires **minimales**; elle ne constitue donc pas un objectif, mais un prérequis !

ESPACES VECTORIELS

▪▪▪ Espaces et sous-espaces vectoriels

Pour prouver qu'une partie F d'un $\mathbf{K}$-ev E est un sev de E, j'applique la caractérisation des sev :

$\boxed{1}$ je montre que F est non vide : il suffit de vérifier que $\vec{0}_E \in F$.

$\boxed{2}$ je montre que F est stable par combinaisons linéaires : soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, je vérifie que $\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y}$ appartient à F.

Il existe aussi d'autres façons pour montrer que F est un sev de E :

- vérifier que F est le sev engendré par une partie de E, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs de E. Cette méthode est très efficace lorsqu'on connaît un *paramétrage* de F ;
- vérifier que F est l'intersection d'autres sev ;
- vérifier que F est la somme de sev ;
- vérifier que F est l'image ou le noyau d'une application linéaire (prochain chapitre).

Pour démontrer que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbf{K}$-ev,

- je vérifie si E est un des ev de référence : $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}[X]$, $\mathbf{K}_n[X]$, $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$, $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$, $\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$, $\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$,...
- je vérifie si E est un sous-espace d'un ev de référence !
- en dernier recours, j'utilise la définition !

▪▪▪ Sous-espaces supplémentaires

Soit F_1, F_2 deux sev d'un $\mathbf{K}$-ev E, pour démontrer que $E = F_1 \oplus F_2$, j'utilise la définition :

- soit $\vec{x} \in E$ FIXÉ. Par **analyse-synthèse**, je montre qu'il existe un couple $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) \in E^2$ **unique**, tel que
  - $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$
  - $\vec{x}_1 \in F_1$.
  - $\vec{x}_2 \in F_2$
- conclusion : tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un de F_2.

On peut aussi utiliser la caractérisation :

- soit $\vec{x} \in E$ je montre qu'il s'écrit comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2.
- soit $\vec{x} \in F_1 \cap F_2$, je montre que $\vec{x} = \vec{0}_E$.

Exercice 39 : Soit $E = \mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

1. Montrez que l'ensemble $\mathfrak{P}$ (resp. $\mathfrak{I}$) des fonctions paires (resp. impaires) est un sev de E.

2. Montrez que $E = \mathfrak{P} \oplus \mathfrak{I}$.

réponse : 1. La fonction nulle est paire. Soit $f, g \in \mathfrak{P}^2$, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, soit $x \in \mathbf{R}$ alors $(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x)$. Donc $\lambda f + \mu g$ est paire. D'après la caract des sev, $\mathfrak{P}$ est un sev de E. 2. Soit $f \in E$. Par analyse-synthèse on montre qu'il existe un couple (g, h) de fonctions tel que $f = g + h$, g paire, h impaire. ■**Analyse :** supposons qu'un tel couple de fonctions existe. Soit $x \in \mathbf{R}$ alors $\begin{array}{rcl} f(x) & = & g(x) + h(x) \\ f(-x) & = & g(x) - h(x) \end{array}$ D'où je tire $\begin{array}{rcl} g(x) & = & \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ h(x) & = & \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{array}$

■**Synthèse :**réciproquement,je vérifie que le couple défini ci-dessus est solution du problème posé : g est paire, h est impaire et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(x) + h(x) = f(x)$

■**Conclusion :** par analyse-synthèse, nous avons prouvé l'existence et l'unicité d'un couple de fonctions (g, h) tel que g est paire, h est impaire et $f = g + h$. Par définition, ceci revient à dire que $E = \mathfrak{P} \oplus \mathfrak{I}$

▪▪▪ Familles de vecteurs

Soit $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une famille finie de vecteurs de E.

Pour montrer que $\mathscr{F}$ est libre, j'applique la définition :

$\boxed{1}$ soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ des scalaires tels que $\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot u_n = \vec{0}$.

$\boxed{2}$ je traduis cette égalité vectorielle (j'obtiens souvent un SEL_o)

$\boxed{3}$ je montre que la seule possibilité est $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Pour montrer que $\mathscr{F}$ est génératrice, j'applique la définition :

$\boxed{1}$ soit $\vec{x} \in E$ arbitraire. Je cherche $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ des scalaires tels que $\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot u_n = \vec{x}$.

$\boxed{2}$ je traduis cette égalité vectorielle (j'obtiens souvent un SEL)

$\boxed{3}$ j'échelonne ce système et je montre qu'il est compatible.

Pour montrer que $\mathscr{F}$ est une base, j'applique la caractérisation :

$\boxed{1}$ soit $\vec{x} \in E$ arbitraire. Je cherche $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ des scalaires tels que $\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot u_n = \vec{x}$.

$\boxed{2}$ je traduis cette égalité vectorielle (j'obtiens souvent un SEL)

$\boxed{3}$ j'échelonne ce système et je montre qu'il admet une unique solution.