Chapitre 1

Nombres réels et calcul algébrique

Sommaire

OBJECTIFS

Les objectifs de ce chapitre sont assez modestes :

- introduire les notations $\sum$, $\prod$ pour les sommes et produits finis ;
- rappeler et démontrer deux formules sommatoires importantes : formule du binôme et identité géométrique ;
- vous sensibiliser à l'importance de la relation d'ordre sur **R**
- rappeler les méthodes de résolution des équations polynomiales et des systèmes d'équations linéaires

I Opérations dans R

1 Addition et multiplication

Comme vous le savez, l'ensemble **R** des nombres réels est muni de deux opérations : l'addition et la multiplication.

1.a Propriétés de l'addition des réels

Proposition.— Pour tous réels x, y et z, on a :

- $x + y = y + x$. L'addition est **commutative**.
- $(x + y) + z = x + (y + z)$. L'addition est **associative**.
- $x + 0 = 0 + x = x$. 0 est **élément neutre** de l'addition.
- $x + (-x) = (-x) + x = 0$. Tout réel x a un **opposé** noté $-x$.

Vocabulaire : *on résume ces propriétés en disant que* **R** *muni de l'addition est un* ***groupe commutatif***.

1.b Propriétés de la multiplication des réels

Proposition.— Pour tous réels x, y et z, on a :

- $x \times y = y \times x$. La multiplication est **commutative**.
- $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$. La multiplication est **associative**.
- $x \times 1 = 1 \times x = x$. 1 est **élément neutre** de la multiplication.
- si $x \neq 0$, $x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1$. Tout réel non nul x a un **inverse**, noté x^{-1}.

Notation : *En général, le produit $x \times y$ est noté $x.y$, ou plus simplement encore $x\ y$. L'inverse d'un réel x non nul se note aussi $1/x$.*

De plus, la multiplication est distributive par rapport à l'addition :

Proposition.— Distributivité de la multiplication sur l'addition
Pour tous réels x, y, z, on a :

- $(x + y) \times z = x \times z + y \times z$.
- $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.

Vocabulaire : *on résume l'ensemble de ces propriétés en disant que* **R** *muni de l'addition et de la multiplication est un* ***corps***.

1.c Équations dans R

L'existence d'inverses pour les nombres réels non nuls est essentielle pour la manipulation d'équations :

Proposition.— Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ un couple de nombres réels, $a \in \mathbf{R}^\star$ un réel non nul. Alors

- $a \times x = a \times y \iff x = y.$
- $x \times y = 0 \iff x = 0$ *ou* $y = 0.$

Vocabulaire :

- *dans* **R**, *on dit que tout élément non nul* a *est* ***simplifiable***.
- *on dit que* **R** *est* ***intègre***, *ou sans diviseurs de zéro.*

Attention : l'équivalence $a \times x = a \times y \iff x = y$ n'est valide que dans le cas où a est non nul.

Exemple : soit $x \in \mathbf{R}$, on a $x^2 = x \iff x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1$.

2 Sommes et produits finis

2.a Notations $\sum$ et $\prod$

Soit $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels et $n \in \mathbf{N}$ un entier naturel. Définissons

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & ((\cdots((x_0 + x_1) + x_2) + \cdots) + x_{n-1}) + x_n \\ \text{et} \quad P_n & = & ((\cdots((x_0 \times x_1) \times x_2) \times \cdots) \times x_{n-1}) \times x_n \end{array}$$

Comme les lois + et × sont associatives, toutes ces parenthèses sont inutiles, nous noterons donc indifféremment

Notation :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} S_n & = & x_0 + x_1 + \cdots + x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{0 \leq k \leq n} x_k = \sum_{k \in \{0,\ldots,n\}} x_k \\ P_n & = & x_0 \times x_1 \times \cdots \times x_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} x_k = \prod_{0 \leq k \leq n} x_k = \prod_{k \in \{0,\ldots,n\}} x_k \end{array}}$$

Vocabulaire : *l'indice* k *est* ***muet***. *En effet, dans l'expression* $S_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$, *la lettre* k *n'est écrite nulle part, et si vous lisez ceci à voix haute vous n'entendez pas non plus le son* [ka] *! Son rôle dans la notation* $\sum_{k=0}^{n} x_k$ *consiste –seulement– à préciser, quels termes de la suite devront être additionnés. Ainsi* $\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{i=0}^{n} x_i$

Exemple : les nombres factoriels —. soit $n \in \mathbf{N}^\star$ un entier naturel non nul, on note $n! = \prod_{k=1}^{n} k$. Ainsi,

- si $n = 0$ alors $n! = 1$;
- si $n > 0$, alors $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.

Exercice : Montrez que pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Solution ▽

Soit $n \in \mathbf{N}$, *alors*

$$\begin{array}{l|l} 1\cdot & S_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n \\ 1\cdot & S_n = n + n-1 + n-2 + \cdots + 0 \end{array}$$

En ajoutant terme à terme ces deux sommes, il vient

$$2S_n = \underbrace{n + n + n + \cdots + n}_{n+1 \text{ fois}} = n(n+1)$$

Le résultat s'ensuit en divisant par 2 cette dernière égalité. ▲

2.b Associativité, commutativité et distributivité

À l'aide de la notation $\sum$ les propriétés d'associativité, commutativité et distributivité se traduisent par :

Proposition.— Soit $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$, $(y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels et $\lambda \in \mathbf{R}$ un nombre réel. Alors pour tous entiers naturels n et m tels que $m < n$,

$$\sum_{k=0}^{n}(x_k + y_k) = \sum_{k=0}^{n} x_k + \sum_{k=0}^{n} y_k, \quad \sum_{k=0}^{n}(\lambda x_k) = \lambda \times \sum_{k=0}^{n} x_k \text{ et } \quad \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{m} x_k + \sum_{k=m+1}^{n} x_k.$$

Question : Que pensez-vous de l'assertion $\sum (x_k \times y_k) = \left(\sum x_k\right) \times \left(\sum y_k\right)$?

Exercice : Démontrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n.(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2.(n+1)^2}{4}$

Solution ▽

Montrons la première formule sommatoire par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.

- **Initialisation** *pour $n = 0$, on a bien $0 = \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6}$.*
- **Hérédité** *soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Alors*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=n+1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

- **Conclusion** *la formule est vraie pour l'entier 0, elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel.* ▲

2.c Changements d'indice

Comme l'addition et la multiplication sont commutatives, l'ordre dans lequel on effectue l'addition (ou la multiplication) est sans importance. Le résultat est donc inchangé lorsqu'on réarrange les termes (ou les facteurs).

Proposition.— Soit $(m, n) \in \mathbf{N}^2$ tel que $m < n$, et $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels. Alors

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{\ell=0}^{n} x_{n-\ell}$
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} x_k = \sum_{\ell=0}^{n-m} x_{m+\ell}.$

En pratique : pour simplifier la somme $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-m} x_{m+\ell}$ à l'aide du changement d'indice $\boxed{k = m + \ell}$,

$\boxed{1}$ on pose $k = m + \ell$

$\boxed{2}$ vous remplacez ℓ par $k - m$ dans la somme, de sorte que $m + \ell$ est remplacé par k ;

$\boxed{3}$ vous calculez les bornes pour k : comme ℓ varie de 0 à $n - m$, k varie de m à n.

Exemple : $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{48} x_{\ell+2} = \sum_{k=2}^{50} x_k.$

Démonstration ▽

$$\sum_{\ell=0}^{n} x_{n-\ell} = x_{n-0} + x_{n-1} + \cdots + x_2 + x_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

$$\sum_{\ell=0}^{n-m} x_{m+\ell} = x_{m+0} + x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_{m+n-m} = x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_n = \sum_{k=m}^{n} x_k$$ ▲

Exercice : Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Montrez que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]=1-\frac{1}{n+1}$.

Solution $\triangledown$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Utilisons les propriétés d'associativité et commutativité pour obtenir

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$$

Dans la deuxième somme, effectuons le changement d'indice $\boxed{\ell=k+1}$. *Il vient*

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{\ell=2}^{n+1}\frac{1}{\ell}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}.$$

En re-baptisant k l'indice ℓ, des simplifications apparaissent clairement. Précisément, tous les termes d'indice commun dans les deux sommes se simplifient. Utilisons l'associativité pour regrouper ces termes d'indice commun :

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

▲

Dans l'**Exercice** précédent, les termes de la somme se simplifient deux à deux. On dit qu'il y a **télescopage** :

Proposition 1.1.— Télescopage —. Soit $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ deux suites de réels, telles que pour tout entier naturel $k \in \mathbf{N}$, on a :

$$x_k = a_{k+1} - a_k.$$

Alors, pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n}\left[a_{k+1}-a_k\right] = a_{n+1}-a_0.}$$

Démonstration $\triangledown$

La démonstration suit les mêmes lignes que la résolution de l'**Exercice** précédent :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left[a_{k+1}-a_k\right] &= \sum_{k=0}^{n}a_{k+1}-\sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{\ell=1}^{n+1}a_\ell-\sum_{k=0}^{n}a_k\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=0}^{n}a_k=a_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}a_k-a_0-\sum_{k=1}^{n}a_k=a_{n+1}-a_0.\end{aligned}$$

▲

2.d Sommes doubles

Soit $(a_{i,j})$ avec $(i,j) \in \{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}$ une famille de réels dépendants de deux indices. On peut représenter cette famille dans un tableau :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & \text{col } 1 & \text{col } 2 & \text{col } 3 & \cdots & \text{col } n & \\
\text{lig } 1 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} & \to L_1\\
\text{lig } 2 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} & \to L_2\\
\text{lig } 3 & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} & \to L_3\\
\vdots & & & & \ddots & & \\
\text{lig } m & a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} & \to L_m\\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
 & C_1 & C_2 & C_3 & & C_n &
\end{array}$$

Notons pour $1 \leq i \leq m$, et pour $1 \leq j \leq n$,

- L_i la somme des termes de la $i^{\text{ième}}$ ligne, $L_i = a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,n} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$
- C_j la somme des termes de la $j^{\text{ième}}$ colonne $C_j = a_{1,j} + a_{2,j} + \cdots + a_{m,j} = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}$.

On obtient alors la même somme S de tous les $a_{i,j}$ en ajoutant les L_i et les C_j :

$$S = \sum_{i=1}^{m} L_i = \sum_{j=1}^{n} C_j$$

Ainsi, pour ajouter tous les $a_{i,j}$, on peut commencer par sommer en lignes, ou bien en colonnes, le résultat est inchangé. On obtient alors

Proposition.— Interversion de l'ordre de sommation —. Soit $(a_{i,j})$ avec $(i,j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ une famille de nombres réels. Alors

$$\boxed{\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}}$$

En pratique : lorsqu'on vous propose de calculer une somme double, vous avez le choix de l'ordre de sommation.

Exemple : soit $n \in \mathbf{N}^\star$ un entier naturel non nul, calculons $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} i \times j$.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} i \times j &= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} i \times j \right] = \sum_{i=1}^{n} \left[i \times \sum_{j=1}^{n} j \right] = \left[\sum_{i=1}^{n} i \right] \times \left[\sum_{j=1}^{n} j \right] \\ &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] \times \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

Question : Que pensez-vous de l'assertion $\sum (x_i \times y_j) = \left(\sum x_i\right) \times \left(\sum y_j\right)$?

Défi ! Soit $(a_{i,j})$ avec $(i,j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$ une famille de nombres réels.

1. Vérifiez que $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$.
2. **Application :** calculez la somme double $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i \times j$.

Remarque : Les notations $\sum$ et $\prod$ s'appliquent bien entendu aux nombres réels ou complexes, et les règles de calcul énoncées ci-dessus restent valables dans ce cadre plus général.

3 Puissances entières d'un nombre réel

Définition : *Soit $a \in \mathbf{R}^\star$ un réel et $n \in \mathbf{Z}$ un entier relatif :*

- *si $n = 0$, on pose $a^0 = 1$;*
- *si $n > 0$, $a^n = \prod_{k=1}^{n} a = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$;*
- *si $n < 0$, $a^n = (1/a)^{|n|}$.*

Remarque : Si $a = 0$, on convient que $0^0 = 1$, les puissances d'exposant strictement positif sont nulles, et les puissances d'exposants strictement négatif ne sont pas définies.

Vocabulaire : *dans l'écriture a^n, a s'appelle la* ***base*** *et n l'****exposant****.*

Les règles de calcul pour les puissances, rappelées dans la proposition ci-dessous, doivent être parfaitement connues :

Proposition.— Règles de calcul avec les puissances d'exposants entiers —. Pour tout couple $(a, b) \in \mathbf{R}^\star \times \mathbf{R}^\star$ de réels non nuls et pour tout couple $(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ d'entiers relatifs :

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Warning : m et n peuvent être négatifs !

Démonstration ▽

ces résultats découlent des propriétés d'associativité et de commutativité de la multiplication. ▲

4 Identités remarquables : formule du binôme et identité géométrique

4.a Rappel de quelques formules remarquables

Jusqu'à présent, les identités remarquables que vous connaissez sont :

$$\begin{array}{rclcrcl}
(a+b)^2 & = & a^2 + 2\,ab + b^2 & \qquad & (a+b)^3 & = & a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3 \\
(a-b)^2 & = & a^2 - 2\,ab + b^2 & & (a-b)^3 & = & a^3 - 3\,a^2b + 3\,ab^2 - b^3 \\
a^2 - b^2 & = & (a-b)\,(a+b) & & a^3 - b^3 & = & (a-b)\,(a^2 + ab + b^2)
\end{array}$$

Nous allons voir comment ces identités remarquables se généralisent dans le cas d'un exposant naturel quelconque.

4.b Identité géométrique

La dernière ligne se généralise en une *formule sommatoire très importante*, il s'agit de l'

Théorème 1.2.— Identité géométrique —. Soit $n \in \mathbf{N}$, $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, alors

$$\boxed{a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^{n} a^k\, b^{n-k}}$$

Exemple : soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, alors

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \text{ et } a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

Démonstration ▽

$$(a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n} a^k\, b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (a-b) \times a^k\, b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left[a^{k+1}\, b^{n-k} - a^k\, b^{n+1-k}\right]$$

Posons $\alpha_k = a^k\, b^{n+1-k}$, de sorte que $\alpha_{k+1} = a^{k+1}\, b^{n-k}$. Par **télescopage**, il s'ensuit :

$$(a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n} a^k\, b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left[\alpha_{k+1} - \alpha_k\right] = \alpha_{n+1} - \alpha_0 = a^{n+1} - b^{n+1}$$

▲

Remarque : lorsque $a \neq b$, on peut aussi écrire cette identité sous la forme

$$\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

Dans le cas particulier où $b = 1$, nous obtenons :

Corollaire 1.3.— Identité géométrique —. Soit $a \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbf{N}$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}}$$

Commentaires : cette formule sommatoire permet de calculer la somme des premiers termes de la suite *géométrique* de raison a et de premier terme 1, d'où le nom de cette formule.

4.c Les coefficients du binôme

Vous le savez certainement, les deux premières lignes se généralisent grâce à la formule du binôme :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$$

Avant de démontrer cette formule, il convient de rappeler la définition et les propriétés essentielles des $\binom{n}{k}$

Notation : *Pour $(n, z) \in \mathbf{Z}^2$, le coefficient $\binom{n}{k}$* [1] *est appelé **coefficient du binôme**. Il est défini par*

- $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ *si* $0 \leq k \leq n$
- $\binom{n}{k} = 0$ *sinon.*

Remarque : lorsque $0 \leq k \leq n$, après simplification des nombres factoriels, il vient :

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{\text{produit de } k \text{ facteurs consécutifs à partir de } n}{\text{produit de } k \text{ facteurs consécutifs à partir de } 1}$$

Exemple : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Théorème 1.4.— Propriétés des coefficients du binôme —. Soit $(n, k) \in \mathbf{N}^2$,

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n+1}{k+1} = \dfrac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Vocabulaire : *Le deuxième •, je l'appelle la "petite formule". Le dernier • est appelé la* **relation de Pascal***.*

Démonstration ▽
Supposons sans perte de généralité [2] que $0 \leq k \leq n$. En ce cas, [3]

$$\begin{aligned}
\binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} \\
\binom{n+1}{k+1} &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,((n+1)-(k+1))!} = \frac{(n+1)!}{((k+1)!\,(n-k)!} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}
\end{aligned}$$

1. lisez k parmi n
2. sans cela, toutes les quantités proposées sont nulles !
3. on utilise $(n+1)! = (n+1) \times n!$ et $(k+1)! = (k+1) \times k!$

Montrons à présent la **relation de Pascal** :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}=\frac{(k+1)\,n!}{(k+1)!\,(n-k)!}+\frac{(n-k)\,n!}{(k+1)!\,(n-k)!}\\
&= \frac{(n-k+k+1)\,n!}{(k+1)!\,((n+1)-(k+1))!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,((n+1)-(k+1))!}\\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

▲

4.d La formule du binôme de Newton

Nous sommes à présent en mesure de démontrer la

Théorème 1.5.— Formule du binôme de Newton —. Soit $n\in\mathbf{N}$, et $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ un couple de réels, alors

$$\boxed{(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\,b^{n-k}}$$

Démonstration ▽
Soit $(a,b)\in\mathbf{R}^2$, montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\,b^{n-k}$.

- **Initialisation :** Pour $n=0$, nous avons $(a+b)^0=1=\binom{n}{0}a^0\,b^0$.
- **Hérédité :** Soit $n\geq 0$ tel que la formule du binôme soit vérifiée pour la puissance $n^{\text{ième}}$. Montrons que $n+1$ hérite de cette propriété :

  Grâce à la relation de Pascal $\binom{n+1}{\ell}=\binom{n}{\ell}+\binom{n}{\ell-1}$, il vient

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b).(a+b)^n=(a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\,b^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}\,b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\,b^{n-k+1}\\
&= \sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n}{\ell-1}a^\ell\,b^{n-\ell+1}+\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}a^\ell\,b^{n+1-\ell}=a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{\ell=1}^{n}\left(\binom{n}{\ell-1}+\binom{n}{\ell}\right)a^\ell\,b^{n+1-\ell}\\
&= a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{\ell=1}^{n}\binom{n+1}{\ell}a^\ell\,b^{n+1-\ell}=\sum_{\ell=0}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}a^\ell\,b^{n+1-\ell}.
\end{aligned}$$

- **Conclusion :** Nous avons démontré par récurrence que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\,b^{n-k}$. ▲

On en déduit aisément

Corollaire 1.6.— Pour tout entier naturel $n\in\mathbf{N}$,

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0^n.$

Démonstration ▽
Appliquez successivement le **théorème 1.5** à $(a,b)=(1,1)$ et $(a,b)=(-1,1)$. ▲

4.e Le triangle de Pascal

La **relation de Pascal** est aussi appelée **relation de récurrence**, car elle permet de construire de proche en proche la table des coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$, appelée **triangle de Pascal**.

On peut représenter la famille double des $\binom{n}{k}$, dans un tableau à double entrée, où n est l'indice de ligne et k l'indice de colonne, de sorte que $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k+1}$ et $\binom{n+1}{k+1}$ apparaissent dans ce tableau dans la configuration suivante :

$$\begin{array}{cccc} & \vdots & \vdots & \\ \cdots & \binom{n}{k} & \binom{n}{k+1} & \cdots \\ & & \binom{n+1}{k+1} & \end{array}$$

D'après la relation de récurrence de **Pascal**, le troisième terme est égal à la somme des deux premiers. En répétant ce procédé, on obtient :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$		$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	
$n=0$	1										
$n=1$	1	1									
$n=2$	1	2	1								
$n=3$	1	3	3		1						
$n=4$	1	4	6		4	1					
$n=5$	1	5	10		10	5	1				
$n=6$	1	6	15		20	15	6	1			
$n=7$	1	7	21		35	35	21	7	1		
$n=8$	1	8	**28**	+	**56**	70	56	28	8	1	
					$\Vert$						
$n=9$	1	9	36		**84**	126	126	84	36	9	1

En pratique : pour développer $(a+b)^4$ à l'aide de la formule du binôme,

$\boxed{1}$ déterminez les coefficients du binôme $\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}$ à l'aide du triangle de Pascal.

$\boxed{2}$ remplacez dans la formule, il vient :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Exercice : Développez le polynôme $(2+x)^4$ par la formule du binôme.

Exercice : Démontrez la généralisation suivante de la **relation de Pascal** :

$$\text{Pour tout } (n,p) \in \mathbf{N}^2, \text{ tel que } 0 \leq p \leq n, \qquad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

II Relation d'ordre sur R

1 Propriétés fondamentales de la relation d'ordre

Tout comme **N**, **Z** et **Q**, **R** est un ensemble ordonné par $\leq$. Rappelons tout d'abord les propriétés basiques de la relation d'ordre :

Proposition 1.7.— Propriétés de la relation d'ordre sur R

- **réflexivité** pour tout réel x, on a : $x \leq x$.
- **antisymétrie** pour tout couple (x,y) de réels , on a : $\big(x \leq y$ et $y \leq x\big)$ *si et seulement si* $x = y$.
- **transitivité** pour tout triplet (x,y,z) de réels, **si** $\big(x \leq y$ et $y \leq z\big)$ **alors** $x \leq z$.
- **ordre total** pour tout couple (x,y) de réels, on a : $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Comme cela apparaîtra très clairement [4] dans la suite du cours d'analyse, la relation d'ordre est **fondamentale**. La monotonie [5] d'une suite ou d'une fonction simplifiera profondément l'étude d'un tel objet mathématique.

4. j'espère !
5. *i.e.* la croissance ou la décroissance

Notation : *La relation $x < y$ signifie ($x \leq y$ et $x \neq y$). On note $\mathbf{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nul, et $\mathbf{R}^{+\star}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.*

2 Compatibilité des opérations et de la relation d'ordre

L'addition et la multiplication des réels sont compatibles avec la relation d'ordre au sens suivant :

Théorème 1.8.— Soit x et y deux nombres réels. On suppose[6] que $x < y$. Alors

- Pour tout réel $z \in \mathbf{R}$, $\quad x + z < y + z$,
- Pour tout réel strictement positif $z \in \mathbf{R}^{+\star}$, $\quad x \times z < y \times z$

On déduit aisément que le passage aux inverses, ou la multiplication par un réel négatif sont aussi **compatibles** avec la relation d'ordre.

Corollaire 1.9.— Pour tous $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ et $(u, v) \in \mathbf{R}^2$,

$$\textbf{si } (0 < x < y) \textbf{ alors } (0 < y^{-1} < x^{-1}) \qquad \textbf{si } (x \leq y \text{ et } z \leq 0) \textbf{ alors } (x \times z \geq y \times z)$$

$$\textbf{si } \begin{cases} x \leq y \\ u \leq v \end{cases} \textbf{ alors } (x + u \leq y + v) \qquad \textbf{si } \begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq u \leq v \end{cases} \textbf{ alors } (x \times u \leq y \times v).$$

Commentaires : l'ordre est entièrement compatible avec la multiplication. Cette compatibilité s'exprime différemment suivant que l'on multiplie une inégalité par un nombre positif ou négatif.

En pratique : pour encadrer une somme :

$\boxed{1}$ on encadre chaque terme

$\boxed{2}$ on ajoute terme à terme

Exercice : Montrez que pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2 + k} \leq \frac{n+1}{n^2}$$

Solution $\triangledown$

Soit $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. De l'encadrement $0 \leq k \leq n$, je tire

$$\frac{1}{n^2 + n} \leq \frac{1}{n^2 + k} \leq \frac{1}{n^2}$$

En sommant terme à terme ces $n + 1$ encadrements, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2 + n} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2 + k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2}.$$

Comme $\dfrac{1}{n^2 + n}$ est indépendant de l'indice k de sommation, il s'agit d'un facteur commun, ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2 + n} &= \frac{1}{n^2 + n} \sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{n+1}{n^2 + n} = \frac{1}{n} \\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{n+1}{n^2}. \end{aligned}$$

Finalement, nous avons obtenu :

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2 + k} \leq \frac{n+1}{n^2}$$

▲

6. cf **proposition 1.7**

3 Droite numérique achevée

La notation $\bar{\mathbf{R}}$ est pratique pour l'étude de limites, que ce soit pour les limites de fonctions ou de suites.

Définition : *On appelle* ***droite numérique achevée****, et on note* $\bar{\mathbf{R}}$*, l'ensemble* $\mathbf{R}$ *des nombres réels auquel on ajoute deux éléments* ***non réels****, notés* $+\infty$ *et* $-\infty$*. On note aussi* $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$*.*

3.a Relation d'ordre total dans $\overline{\mathbf{R}}$

On prolonge la relation d'ordre sur $\mathbf{R}$ à $\bar{\mathbf{R}}$ en posant :

Définition : $\bar{\mathbf{R}}$ *est muni d'une relation d'ordre total, notée encore* $\leq$*, définie par :*

- *Pour tout* $x \in \bar{\mathbf{R}}$, $x \leq +\infty$,
- *Pour tout* $x \in \bar{\mathbf{R}}$, $x \geq -\infty$.

Illustration : On peut se *figurer* l'ensemble $\bar{\mathbf{R}}$ de la manière suivante :

$$\underset{-\infty}{\bullet} \quad \cdots \quad \text{———————}+\text{———————} \quad \cdots \quad \underset{+\infty}{\bullet}$$

3.b Addition et multiplication dans $\overline{\mathbf{R}}$

Définition : *On prolonge*[7] *l'addition et la multiplication à* $\bar{\mathbf{R}}$*, en posant :*

- *Pour tout* $x \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, $x + (+\infty) = +\infty$ *et pour tout* $x \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $x + (-\infty) = -\infty$.
- *Pour tout* $x \in \mathbf{R}^{+\star} \cup \{+\infty\}$, $x \times (+\infty) = +\infty$ *et pour tout* $x \in \mathbf{R}^{+\star} \cup \{+\infty\}$. $x \times (-\infty) = -\infty$
- *Pour tout* $x \in \mathbf{R}^{-\star} \cup \{-\infty\}$, $x \times (+\infty) = -\infty$ *et pour tout* $x \in \mathbf{R}^{-\star} \cup \{-\infty\}$. $x \times (-\infty) = +\infty$

Remarque : vous pouvez noter que les expressions $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \times (+\infty)$ ou $0 \times (-\infty)$ ne sont pas définies. Ces expressions sont appelées **formes indéterminées**. Elles n'ont pas de sens, comme nous le verrons lors de notre étude des suites réelles.

4 Valeur absolue d'un nombre réel

4.a Définition et premières propriétés

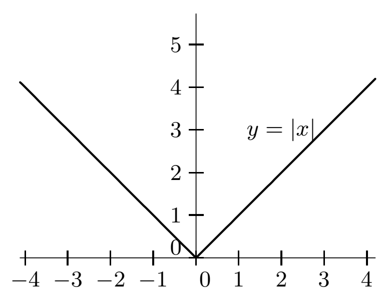
Définition : *Soit* $x \in \mathbf{R}$*. On définit les* ***parties positive et négative*** *de* x*, et on note* x^+ *et* x^- *les nombres positifs*

$$x^+ = \max\{x, 0\} \quad x^- = \max\{-x, 0\}$$

Définition : *Pour tout réel* x*, on définit la* ***valeur absolue*** *de* x *par :*

$$|x| = \max\{x, -x\} = x^+ + x^- = \begin{cases} x \ si \ x \geq 0 \\ -x \ si \ x \leq 0 \end{cases}.$$

Interprétation : Soit M le point d'abscisse x sur la droite numérique. Le nombre $|x|$ représente, la distance OM, du point M à l'origine.



Lemme 1.10.— Soit x et y des réels,

- $|-x| = |x| = \sqrt{x^2}$
- $|x.y| = |x|.|y|$
- si de plus, $y \neq 0$, $|(x/y)| = (|x|/|y|)$.
- $|x| \geq x$ et $|x| = x$ *si et seulement si* $x \geq 0$
- $|x| \geq 0$ et $|x| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$

Comme conséquence, on en déduit :

En pratique : pour démontrer que $|x| \leq \alpha$, où α est un réel positif, vous pouvez montrer au choix

- $-\alpha \leq x \leq \alpha$,
- $x^2 \leq \alpha^2$.

7. de façon commutative

4.b Inégalités triangulaires

La manipulation des inégalités[8] joue un rôle essentiel en analyse, comme nous le verrons très rapidement. La *boîte à outils* de base contient les deux résultats suivants, connus sous le nom d'**Inégalités triangulaires** :

Proposition 1.11.— Inégalité triangulaire —. Pour tout couple (x, y) de nombres réels,

- $|x+y| \leq |x| + |y|$.
- $|x+y| = |x| + |y| \iff x\ y \geq 0$

Démonstration ▽
Les deux nombres à comparer sont positifs. Ils sont donc rangés dans le même ordre que leurs carrés. Or $(|x| + |y|)^2 - |x+y|^2 = 2.(|x|.|y| - x.y) = 2.(|x.y| - x.y)$ qui est toujours positif (ou nul) d'après les propriétés élémentaires de la valeur absolue. Ainsi $|x+y| \leq |x| + |y|$. De plus

$$|x+y| = |x| + |y| \iff xy - |xy| = 0 \iff xy = |xy| \iff xy \geq 0$$

▲

En pratique : pour majorer la valeur absolue d'une somme, il n'y a que deux méthodes au choix :

- vous majorez par la somme des valeurs absolues
- vous calculez directement la somme (lorsque c'est possible !)

Corollaire 1.12.— Inégalité triangulaire bis —. Pour tout couple $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

- $|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$

Démonstration ▽
Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

$$\begin{aligned} x &= x - y + y \\ y &= y + x - y \end{aligned}$$

D'après la proposition ci-dessus, $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$. On en déduit que :

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

En échangeant les rôles de x et y dans la preuve ci-dessus, on montre de la même manière que

$$|y| - |x| \leq |x - y|.$$

ce qui prouve l'inégalité annoncée. ▲

Remarque : j'attire votre attention sur le fait que la **Proposition** 1.11 et le **Corollaire** 1.12 sont vraies pour tout couple (x, y) de réels[9]. Vous pouvez donc par exemple *choisir* de les appliquer à x et $-y$ par exemple. La **Proposition** 1.11 donne alors :

$$\text{pour tout } (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad |x - y| \leq |x| + |y|.$$

ce qui complète le **Corollaire** 1.12 en permettant d'obtenir un encadrement de $|x - y|$.

Exercice : Montrez que

1. pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $\quad |x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$

2. pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\quad |x + y| + |x - y| \geq |x| + |y|$

Solution ▽

1. *Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Deux applications successives de l'inégalité triangulaire donnent :*

$$\begin{aligned} |x + y + z| = |(x + y) + z| &\leq |x + y| + |z| \\ &\leq \big(|x| + |z|\big) + |z| = |x| + |y| + |z| \end{aligned}$$

8. *i.e.* la recherche d'estimations, minorations ou majorations
9. on dit qu'il s'agit de propriétés **universelles** de $\mathbf{R}^2$

2. *Remarquons que* $2x = (x+y)+(x-y)$. *Par suite,* $2|x| = |(x+y)+(x-y)| \leq |x+y|+|x-y|$. *Autrement dit,*

$$|x| \leq \frac{1}{2}\left[|x+y|+|x-y|\right]$$

De même, écrivons $2y = (x+y)-(x-y)$ *et appliquons l'inégalité triangulaire, il vient*

$$|y| \leq \frac{1}{2}\left[|x+y|+|x-y|\right]$$

On obtient l'inégalité désirée en ajoutant terme à terme ces deux inégalités. ▲

5 Partie entière d'un réel

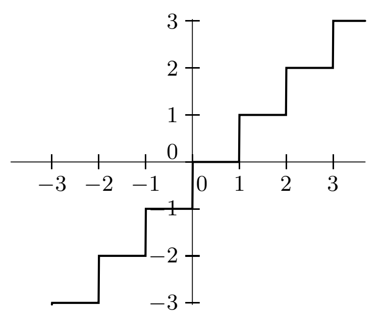
Théorème-Définition 1.13.— Soit $x \in \mathbf{R}$ un réel. Il existe un entier $n \in \mathbf{Z}$, unique, tel que :

$$\boxed{n \leq x < n+1}$$

L'entier n est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. On l'appelle la **partie entière** de x, et on le note $\lfloor x \rfloor$.

Exemple : $\lfloor 3,87 \rfloor = 3$ et $\lfloor -56,4 \rfloor = -57$.

Illustration : Graphe de la fonction partie entière



Proposition.— Propriétés de la partie entière —. Pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $n \in \mathbf{Z}$ on a :

1.	$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.	**4.**	$\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
2.	$x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.	**5.**	**si** $x \leq y$ **alors** $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.
3.	$x = \lfloor x \rfloor$ *si et seulement si* $x \in \mathbf{Z}$.	**6.**	**si** $x \leq n$ **alors** $\lfloor x \rfloor \leq n$.

Remarque : en général, on n'a pas $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ ni $\lfloor x \times y \rfloor = \lfloor x \rfloor \times \lfloor y \rfloor$. Ces deux assertions sont fausses en général, comme on le vérifie aisément en considérant $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$, ou $y = 2$.

Démonstration ▽

Le 1. découle directement de la définition de $\lfloor x \rfloor$.

Montrons le 2. D'après le 1. nous avons d'une part $x \geq \lfloor x \rfloor$ et d'autre part $x < \lfloor x \rfloor + 1$, ce qui revient précisément à $x-1 < \lfloor x \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor \leq x$.

Pour le 3. Si $x = \lfloor x \rfloor$, alors $x \in \mathbf{Z}$ car par définition la partie entière de tout nombre réel est un nombre entier ! Si $x \in \mathbf{Z}$, il résulte de l'unicité de $\lfloor x \rfloor$ que $\lfloor x \rfloor = x$.

Le 4. résulte aussi de l'unicité : par définition $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. En ajoutant n aux membres de cet encadrement, nous obtenons $\lfloor x \rfloor + n \leq x+n < \lfloor x \rfloor + n + 1$. Par unicité de $\lfloor x+n \rfloor$, il en résulte que $\lfloor x \rfloor + n = \lfloor x+n \rfloor$.

Pour le 5. considérons $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x \leq y$. Par définition, $\lfloor x \rfloor$ est un entier inférieur ou égal à x. L'hypothèse,

$x \leq y$ permet d'en déduire que $\lfloor x \rfloor$ est un entier inférieur ou égal à y. Comme $\lfloor y \rfloor$ est le plus grand des entiers inférieurs à y, il en résulte que $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$. Pour le 6. Il suffit d'utiliser la croissance de la fonction partie entière et le 3. ▲

Exercice : Démontrez que pour tout nombre réel $x \in \mathbf{R}$,

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor x \right\rfloor$$

Indication : vous pourrez discuter suivant la parité de $\lfloor x \rfloor$.

Solution ▽

• *si $\lfloor x \rfloor = 2n$ est un entier pair. Voyons comment déduire les parties entières de $\frac{x}{2}$ et de $\frac{x+1}{2}$ à partir de l'encadrement*

$$2n \leq x < 2n+1. \tag{1.1}$$

- *En divisant par 2 l'encadrement (1.1), nous obtenons $n \leq \frac{x}{2} < n + \frac{1}{2}$. En particulier*

$$n \leq \frac{x}{2} < n+1$$

D'où, par unicité de la partie entière de $\frac{x}{2}$, il vient $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = n$.

- *Ajoutons 1 et divisons par 2, l'encadrement (1.1) donne : $n + \frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{2} < n+1$. En particulier*

$$n \leq \frac{x+1}{2} < n+1$$

L'unicité de la partie entière nous permet d'en déduire que $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = n$.

Ainsi, si $\lfloor x \rfloor = 2n$ est pair, alors

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = n + n = 2n = \left\lfloor x \right\rfloor$$

• *si $\lfloor x \rfloor = 2n+1$ est un entier impair. À vous de jouer !* ▲

6 Intervalles de R

Définition : *Une partie I de* **R** *est appelée un* ***intervalle*** *si $I = \mathbf{R}$, ou $I = \emptyset$ ou s'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ et /ou $\beta \in \mathbf{R}$ tel(s) que I soit l'une des 8 parties suivantes de* **R** *:*

- $[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbf{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$ *intervalle borné fermé, ou* ***segment***
- $]\alpha, \beta[= \{x \in \mathbf{R} \mid \alpha < x < \beta\}$ *intervalle borné ouvert*
- $[\alpha, \beta[= \{x \in \mathbf{R} \mid \alpha \leq x < \beta\}$ *intervalle borné semi-ouvert à droite*
- $]\alpha, \beta] = \{x \in \mathbf{R} \mid \alpha < x \leq \beta\}$ *intervalle borné semi-ouvert à gauche*

- $]-\infty, \beta[= \{x \in \mathbf{R} \mid x < \beta\}$ *intevalle ouvert non minoré*
- $]-\infty, \beta] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq \beta\}$ *intervalle fermé non minoré*

- $]\alpha, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x > \alpha\}$ *intervalle ouvert non majoré*
- $[\alpha, \infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq \alpha\}$ *intervalle fermé non majoré*

Commentaires : comme nous le montrerons dans la suite du cours (cf **Chapitre 14**), une partie I de **R** est un intervalle *si et seulement si* elle n'a pas de trous !

III Équations dans R

1 Équations polynomiales

Définition : *Soit $P : I \to \mathbf{R}$ la fonction polynomiale définie sur un intervalle I de* **R** *par*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Résoudre dans I l'équation

$$P(x) = 0 \tag{1.2}$$

c'est déterminer l'ensemble $\mathcal{S} = \{x \in I \mid P(x) = 0\}$

Vocabulaire :

- *dans l'équation* (1.2)*, x s'appelle l'**inconnue** ;*
- *un élément $x \in \mathcal{S}$ est appelé une **solution** de* (1.2).

Exemple :

$$3x^4 - 7x^2 + 5 = 0$$

2 Équations polynomiales de degré inférieur ou égal à 2

2.a Équations polynomiales de degré inférieur à 1

Proposition 1.14.— Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ un couple de réels et considérons l'équation $ax + b = 0$.

- si $a \neq 0$, alors elle possède une unique solution dans $\mathbf{R}$, $\mathcal{S} = \{-\dfrac{b}{a}\}$,
- si $a = 0$ alors
  - si $b = 0$, tout réel est solution
  - si $b \neq 0$, l'équation ne possède aucune solution.

2.b Équations polynomiales de degré 2

Proposition 1.15.— Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ un triplet de nombres réels avec a **non nul** et considérons l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. On introduit le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- si $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes dans $\mathbf{R}$: $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. De plus,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \times (x - x_2)$$

- si $\Delta = 0$, l'équation possède une racine double dans $\mathbf{R}$ $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et dans ce cas

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

- si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution dans $\mathbf{R}$.

Démonstration ▽

Soit $x \in \mathbf{R}$. Mettons le trinôme $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique :

$$P(x) \quad = \quad ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

- Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors P ne saurait s'annuler ;
- Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, alors $P(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$;
- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, alors l'identité géométrique permet de conclure :

$$P(x) = a\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Exemple : L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle. L'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ admet comme solution $\mathcal{S} = \{2; 3\}$.

Proposition 1.16.— Système somme-produit —. Soit $(s,p) \in \mathbf{R}^2$, un couple de réels.
Les solutions du système $\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=s \\ x_1\times x_2=p \end{array}\right.$ sont les couples $(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$, où x_1 et x_2 sont les solutions –éventuellement confondues– de l'équation du deuxième degré $x^2-sx+p=0$.

Démonstration $\triangledown$
Soit $(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$ un couple solution du système $\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=s \\ x_1\times x_2=p \end{array}\right.$. Alors $x_1^2-sx_1+p=x_1^2-(x_1+x_2)x_1+x_1x_2=0$ et $x_2^2-sx_2+p=x_2^2-(x_1+x_2)x_2+x_1x_2=0$.
Réciproquement, si x_1 et x_2 sont les solutions réelles de l'équation $x^2-sx+p=0$, ce polynôme se factorise d'après la **Proposition** précédente sous la forme :

$$\begin{aligned} x^2-sx+p &= (x-x_1)(x-x_2) \\ &= x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2. \end{aligned}$$

Par identification des coefficients, il en résulte que $\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=s \\ x_1\times x_2=p \end{array}\right.$. ▲

En pratique : Cette équivalence est très utile pour obtenir des racines[10] évidentes :

Défi ! Résoudre dans **R** l'équation $x^2+\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$.

3 Équations polynomiales de degré supérieur ou égal à 3

Dans le cas général d'une équation de degré quelconque n, $n \geq 3$

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

il n'y a pas de formule permettant de calculer ses racines. La méthode consiste alors à chercher à se ramener à la résolution de plusieurs équations de degrés inférieurs. Pour cela, deux pistes sont envisageables :

- **factoriser** P ,
- **effectuer un changement d'inconnue**

Avant d'illustrer ces méthodes commençons par étudier un cas particulier d'équation polynomiale de degré n.

3.a Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un réel positif

Considérons l'équation polynomiale de degré $n \in \mathbf{N}^\star$

$$x^n=a. \tag{1.3}$$

Proposition-Définition 1.17.— Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Pour tout réel positif $a \in \mathbf{R}^+$, il existe $b \in \mathbf{R}^+$, unique tel que :

$$b^n=a. \tag{1.4}$$

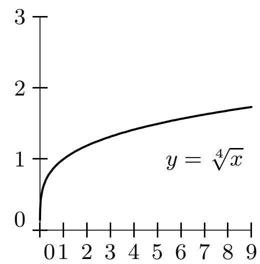
Cet élément b est noté $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{1/n}$ et est appelé la **racine** $n^{\textit{ième}}$ de a.

Notation : *Dans le cas où* $n=2$, *on notera bien sûr* $\sqrt{a}$ *à la place de* $\sqrt[2]{a}$

Remarque : l'existence et l'unicité des racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un réel positif sera démontrée ultérieurement lorsque nous compléterons ce chapitre. ☺

Illustration : graphe de la fonction racine quatrième

10. plus ou moins



3.b Factorisation

Dans le cas d'une équation polynomiale de degré n, l'intégrité de $\mathbf{R}$ montre que

Théorème 1.18.— Soit $A, B : I \to \mathbf{R}$ deux fonctions polynomiales définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. Pour tout réel $x \in I$, on a :

$$A(x) \times B(x) = 0 \iff A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0.$$

Commentaires : Autrement dit, les solutions de l'équation $A(x) \times B(x) = 0$ sont les solutions de l'équation $A(x) = 0$ d'une part et les solutions de l'équation $B(x) = 0$ d'autre part.

En pratique : pour résoudre dans I l'équation (1.2), vous chercherez à factoriser P sous la forme

$$P(x) = A(x) \times B(x)$$

afin de vous ramener à des équations de degrés inférieurs. Cette factorisation peut être obtenue

- en suivant les indications de l'énoncé ☺
- en remarquant que P possède une racine évidente ;
- en utilisant les identités remarquables : **formule du binôme** ou **identité géométrique**.

Exercice : Résolvez dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes :

- $2x^3 + 6x^2 + 5x + 1 = 0$
- $3 + \sqrt{2x+7} = 17 - x$

3.c Changement d'inconnue

Un moyen radical de faire baisser le degré des équations est d'effectuer un changement d'inconnue.

Exercice : En posant $X = x^2$, résolvez dans $\mathbf{R}$ l'équation $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$.

Solution ▽

Soit $x \in \mathbf{R}$. Effectuons le changement d'inconnue $X = x^2$. On a

$$36x^4 - 13x^2 + 1 = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} X & = & x^2 \\ 36X^2 - 13X + 1 & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} X & = & x^2 \\ X = \dfrac{1}{9} & ou & X = \dfrac{1}{4} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x^2 = \dfrac{1}{9} \\ ou \\ x^2 = \dfrac{1}{4} \end{array} \right.$$

Ainsi, on s'est ramené au moyen du changement d'inconnue $X = x^2$ à un problème d'extraction de racine. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équations proposée est $\mathcal{S} = \{\pm\frac{1}{3}; \pm\frac{1}{2}\}$. ▲

4 Systèmes d'équations linéaires

Le problème est de résoudre simultanément des équations linéaires (*i.e.* polynomiales de degré inférieur ou égal à 1) mettant en jeu plusieurs inconnues, par exemple

$$(S) \left\{ \begin{array}{rrrrrl} x & +y & +z & +t = & 10 & (L_1) \\ x & +2y & +3z & +t = & 6 & (L_2) \\ 2x & +3y & +4z & +6t = & 46 & (L_3) \\ x & -y & +z & -t = & -2 & (L_4) \end{array} \right.$$

4.a Opérations élémentaires

Proposition 1.19.— Opérations élémentaires sur les lignes
L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions du système d'équations linéaires (S) ne change pas si l'on effectue sur les lignes les **opérations élémentaires** suivantes :

- échanger l'ordre des lignes L_i et L_j $(L_i \leftrightarrow L_j)$,
- multiplier la ligne L_i par une constante non nulle $\lambda_i \in \mathbf{R}^\star$ $(L_i \leftarrow \lambda_i\, L_i)$,
- ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j $(i \neq j)$ $(L_i \leftarrow L_i + \lambda_j L_j)$.

4.b Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss permet par opérations élémentaires sur les lignes du système d'éliminer une inconnue à chaque étape : Ainsi

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rrrrrl} \boxed{1}x & +y & +z & +t = & 10 & L_1 \\ & y & +2z & = & -4 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & y & +2z & +4t = & 26 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ & 2y & & +2t = & 12 & L_4 \leftarrow L_1 - L_4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrl} \boxed{1}x & +y & +z & +t = & 10 & L_1 \\ & \boxed{1}y & +2z & = & -4 & L_2 \leftarrow L_2 \\ & & & +4t = & 30 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ & & -4z & +2t = & 20 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrl} \boxed{1}x & +y & +z & +t = & 10 & L_1 \\ & \boxed{1}y & +2z & = & -4 & L_2 \leftarrow L_2 \\ & & \boxed{-4}z & +2t = & 20 & L_3 \leftarrow L_4 \\ & & & \boxed{4}t = & 30 & L_4 \leftarrow L_3 \end{array}\right.$$

A ce stade, il est aisé de terminer la résolution du système :

- la dernière équation donne $t = \dfrac{15}{2}$ puis
- en substituant dans la troisième, il vient $z = -\dfrac{5}{4}$;
- en substituant dans la deuxième, il vient $y = -\dfrac{3}{2}$;
- finalement la première ligne donne $x = \dfrac{21}{4}$.

Vocabulaire : *on dit qu'on résout par remontée.*