TECHNIQUES & MÉTHODES S19

NB : cette fiche reprend les techniques nécessaires **minimales**; elle ne constitue donc pas un objectif, mais un prérequis !

■■■ Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples

Démarche générale

Soit $F \in \mathbf{K}(X)$. Pour obtenir la DES de F, je dois :

1 présenter $F = P/Q$ sous forme irréductible : il suffit de simplifier par le PGCD du numérateur et dénominateur ;

2 déterminer la partie entière de F à l'aide de la division euclidienne de P par Q ;

3 décomposer Q en produits d'irréductibles de $\mathbf{K}[X]$;

4 exprimer la DES de F à l'aide de coefficients inconnus

5 déterminer les coefficients.

Remarque : par unicité, lorsque F est de degré strictement négatif, sa partie entière est nulle.

Expression de la DES

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbf{K}(X)$ une fraction rationnelle non nulle présentée sous forme irréductible.

▸[$\mathbf{K} = \mathbf{C}$] $\quad F = Ent(F) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{a_{i,k}}{(X-\alpha_i)^{p_i-k}}$,

où $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)^{p_i}$ est la décomposition primaire de Q dans $\mathbf{C}[X]$.

▸[$\mathbf{K} = \mathbf{R}$] $\quad F = Ent(F) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{a_{i,k}}{(X-\alpha_i)^{p_i-k}} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{q_j-1} \frac{b_{j,k}X+c_{j,k}}{(X^2+\beta_j X+\gamma_j)^{q_j-k}}$

où $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)^{p_i} \times \prod_{j=1}^{m}(X^2+\beta_j X+\gamma_j)^{q_j}$ est la décomposition primaire de Q dans $\mathbf{R}[X]$.

Comment déterminer les coefficients

- je réduis par symétrie le nombre de coefficients à déterminer
  - ▷ utilisation de la parité
  - ▷ utilisation de la conjugaison, lorsque F est à coeff réels et qu'on souhaite une DES dans $\mathbf{C}(X)$
- déterminez les coefficients des pôles simples
  - ▷ en évaluant $(X-\alpha)F(X)$ au point α,
  - ▷ ou en évaluant P/Q' au point α (exos plutôt théoriques)
- déterminez les coefficients des pôles doubles
  - ▷ en évaluant $(X-\alpha)^2F(X)$ au point α
  - ▷ puis en évaluant $\left[(X-\alpha)^2F(X)\right]'$ au point α
- déterminez les coefficients des pôles d'ordre p
  - ▷ en évaluant $(X-\alpha)^pF(X)$ au point α j'obtiens a_0
  - ▷ puis en évaluant $\left[(X-\alpha)^pF(X)\right]^{(k)}$ au point α j'obtiens $k!\ a_k$.
- s'il reste des coefficients à déterminer (notamment pour les éléments simples de $2^{\text{ième}}$ espèce)
  - ▷ en évaluant $(X^2+\beta X+\gamma)^qF(X)$ en une racine complexe de $X^2+\beta X+\gamma$, j'obtiens b_0 et c_0
  - ▷ en déterminant la limite de $XF(X)$ en $+\infty$,
  - ▷ en évaluant $F(X)$ en des valeurs non polaires.

■■■ Application au calcul des primitives

Primitives d'une fraction rationnelle

Soit $F \in \mathbf{R}(X)$. Pour déterminer $\displaystyle\int^x F(t)\,dt$,

1 je présente F sous forme irréductible.

2 si $F(t)$ peut s'écrire $F(t) = t^{n-1}G(t^n)$, j'effectue le changement de variable $u = t^n$.

3 j'effectue la DES de F dans $\mathbf{R}(X)$ à l'aide des méthodes précédemment décrites.

4 j'intégre terme à terme.