# PROGRAMME DE COLLE S27

**NB :** **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

## DÉTERMINANTS ET APPLICATIONS

### Applications $n$-linéaires alternées

**Définition : Applications $n$-linéaires alternées—.** *Soit $E$, $F$ des $\mathbf{K}$-ev, $n \geq 2$.*

- *Une application $\varphi : E^n \to F$ est dite **$n$-linéaire** si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables : $\forall(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \in E^n$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $(\vec{x}_i \in E) \mapsto \varphi(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{x}_i, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_n)$ est linéaire de $E$ vers $F$.*
- *$\varphi$ est dite **alternée** si pour tout $n$-uplet $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \in E^n$, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ vérifiant $1 \leq i < j \leq n$ et $\vec{a}_i = \vec{a}_j$, on a $\varphi(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) = \vec{0}_F$.*

**Notation :** *lorsque $F$ est le corps des scalaires $\mathbf{K}$, on dit que $\varphi$ est une forme $n$-linéaire alternée sur $E$. On note $\Lambda_n(E)$ l'ensemble des **formes $n$-linéaire alternées** sur $E$ (vers $\mathbf{K}$).*

**Proposition.— Antisymétrie des formes linéaires alternées —.** Soit $\varphi \in \Lambda_n(E)$. Alors

$$\boxed{\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n),\ \varphi\big(\vec{x}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{x}_{\sigma(n)}\big) = \varepsilon(\sigma)\ \varphi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)}$$

**Théorème*.— Formes $n$-linéaires alternées sur $E_n$—.** Soit $E$ un $\mathbf{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbf{N}^\star$, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de $E$, et $\varphi \in \Lambda_n(E)$. Pour tout $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$ de matrice représentative, $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = (a_{i,j})$, on a

$$\boxed{\varphi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \left[\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \times a_{\sigma(2),2} \times \cdots \times a_{\sigma(n),n}\right] \times \varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)}$$

**Corollaire*.—** $\Lambda_n(E)$ est un espace vectoriel de dimension 1.

### Déterminant d'une famille de $n$ vecteurs

**Définition :** *Soient $E$ un $\mathbf{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbf{N}^\star$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de $E$. Il existe une forme $n$-linéaire alternée sur $E$, notée $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}} \in \Lambda_n(E)$, unique, telle que $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = 1$. Elle est définie par :*

$$\forall(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) \in E^n, \quad \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \times a_{\sigma(2),2} \times \cdots \times a_{\sigma(n),n}$$

*où $A = (a_{i,j}) = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ est la matrice représentative de la famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$ dans la base $\mathcal{B}$. Le scalaire $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ est appelé le **déterminant de** $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ **dans la base** $\mathcal{B}$.*

**Théorème.— Formule de changement de base —.** Soit $E$ un $\mathbf{K}$-e.v. de dim $n$,$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $E$.

$$\boxed{\forall(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n, \quad \mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)}$$

**Théorème.— Caractérisation des bases —.** Soit $E$ un $\mathbf{K}$ ev de dim $n$, $\mathcal{B}$ une base de $E$ et $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \in E^n$

$$\boxed{(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \text{ est une base de } E \textit{ si et seulement si } \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \neq 0}$$

### Déterminants d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

**Définition :** *Soit $E$ un $\mathbf{K}$-e.v. de dim $n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de $E$. Le scalaire $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}\big(f(\mathcal{B})\big)$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$, et ne dépend que de $f$. On appelle ce scalaire le **déterminant de** $f$. On le note $\mathrm{Det}(f)$.*

**Proposition.—** Soit $E$ un $\mathbf{K}$-e.v. de dim $n$, $(f, g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ et $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$. Alors

- $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}\big(f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_n)\big) = \mathrm{Det}(f) \times \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$
- $\mathrm{Det}(g \circ f) = \mathrm{Det}(g) \times \mathrm{Det}(f)$

**Théorème.— Caractérisation des automorphismes —.** Soit $E$ un $\mathbf{K}$-ev de dim $n$, $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } E \textit{ si et seulement si } \operatorname{Det}(f) \neq 0. \text{ En ce cas, } \operatorname{Det}(f^{-1}) = \big(\operatorname{Det}(f)\big)^{-1}}$$

**Définition :** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On appelle **déterminant de la matrice** $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ le scalaire :*

$$\operatorname{Det}(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \times a_{\sigma(2),2} \times \cdots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

**Corollaire.—** Soit $E$ un $\mathbf{K}$-ev de dim $n$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.

- soit $(\vec{x}_1, \cdots \vec{x}_n) \in E^n$ et notons $A = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$. Alors $\operatorname{Det}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = \operatorname{Det}(A)$.
- soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et notons $A = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors $\operatorname{Det}(f) = \operatorname{Det}(A)$.

**Proposition.—** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors $\operatorname{Det}({}^tA) = \operatorname{Det}(A)$.

**Théorème.— Propriété fondamentale : caractérisation des matrices inversibles —.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

$$\boxed{A \text{ est inversible } \textit{si et seulement si } \operatorname{Det}(A) \neq 0. \text{ En ce cas, } \operatorname{Det}(A^{-1}) = \big(\operatorname{Det}(A)\big)^{-1}}$$

## ▪▪▪ Calcul des déterminants

**Théorème.— Opérations sur les déterminants —.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice de colonnes $C_1, \ldots, C_n$, soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Alors

$$\boxed{\operatorname{Det}(A) = \operatorname{Det}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2, \ldots, C_n)}$$

Ainsi $(C_1, C_2, \ldots, C_n) \mapsto \operatorname{Det}(A)$ est une forme $n$-linéaire alternée.

**Proposition*.— Déterminant d'une matrice triangulaire —.** Soit $A$ une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) d'ordre $n$. Alors $\operatorname{Det}(A)$ est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

**Savoir-faire :** utiliser la $n$-linéarité, l'antisymétrie de Det, pour trianguler un déterminant.

**Théorème*.— Développement par une ligne ou une colonne —.** Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $(i_o, j_o) \in [\![1, n]\!]$,

- $\operatorname{Det}(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i_o,j} (-1)^{i_o+j}\, \Delta_{i_o,j}$
- $\operatorname{Det}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j_o} (-1)^{i+j_o}\, \Delta_{i,j_o}$

où $\Delta_{i,j}$ désigne le déterminant de la matrice extraite de $A$ en supprimant sa $i^{\text{ème}}$ ligne et sa $j^{\text{ème}}$ colonne.

**Savoir-faire :** développer suivant une ligne ou une colonne pour faire apparaître une relation de récurrence.

## ▪▪▪ Applications des déterminants

**Définition : Comatrice —.** *Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Notons pour tout couple $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $b_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$, le cofacteur de $a_{i,j}$. On appelle **comatrice** de $A$, la matrice des cofacteurs de $A$, $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On note $B = \operatorname{Com}(A)$*

**Théorème.— Application du déterminant au calcul de l'inverse d'une matrice —.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors

$$\boxed{A \text{ est inversible } \textit{si et seulement si } \operatorname{Det}(A) \neq 0. \text{ En ce cas, } A^{-1} = \frac{1}{\operatorname{Det}(A)}\, {}^t\operatorname{Com}(A)}$$

**Théorème*.— Application du déterminant au calcul du rang d'une matrice —.** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Le rang de $A$ est l'ordre du plus grand déterminant non nul extrait de la matrice $A$.